徐利治　周蕴时　何天晓　著

高维数值积分选讲

Selected Topis on the Method of Numerical Integration

安徽教育出版社

统一书号：7276·175
定　　价：1.70　元

高维数值积分选讲

徐利治
周蕴时　著
何天晓

安徽教育出版社

高维数值积分选讲

徐利治　周蕴时　何天晓　著

安徽教育出版社出版
（合肥市跃进路1号）
安徽省新华书店发行　安徽新华印刷厂印刷

•

开本：850×1168　1/32　印张：9.125　字数：220000
1985年10月第1版　1985年10月第1次印刷
印数：2,300

统一书号：7276·175　定价：1.70元

序　言

高维数值积分方法的研究，多年来始终吸引着国内外计算数学工作者的兴趣，因此各种新成果的出现总是层出不穷；看来每隔四、五年就有总结一次的必要.

1980年拙著《高维数值积分》出版后，我们曾把它作为研究生选修课教材使用，很快就发现不少章节需要补充、改进和刷新.于是通过不断讨论和互相协作，我们终于写成了这本《选讲》.就其内容题材而言,可看成是前一拙著的续篇或姊妹篇.个别章节内容(例如第二章部份题材)与前一著作略有重复，这是由于本书需要自成体系的原故.

本书第一章较详尽地介绍了欧美学者发展起来的代数方法，并在小结中叙述了一系列尚未解决的问题.这些问题的提出,表明代数方法尚有进一步发展的客观要求.

第二章与第三章的基本题材(包括一系列主要结果)，都是本书作者及其合作者工作成果的系统总结.从“方法论”角度看,显然具有自成一套的独立性.应该提到,第二章中的基本引理和展开定理中的余项表示式及其证明等，都是后来在施咸亮、王兴华等同志的工作中重新完成的，因而也就使我们的原始结果获得精化了的表现形式.

本书的三、四、五各章分别论述了三种类型的积分降维法，它们都以 Gauss-Green 公式作为方法的出发点.这些方法各有其一定的适用范围与特色.它们分别是由本书作者之一于1962—63年，Davis于1972年，Kratz于1979年开始提供出来的.后来，Burrows又于1980年提出利用 Lebesgue 测度函数构造降维公式的新方法.

特别是降维展开方法与高维边界型求积公式自然联系，早在六十年代初就被注意到了.实际上，远在1966年前我们(徐利治、王仁宏、周蕴时等)就曾经利用降维展开法构造出一系列边界型求积公式，并作了数值试验，证实某些边界型公式的有效性.但这些结果直到1978年才获得发表机会.现在看来，关于具有各种代数精度的边界型求积公式的具体构造问题，仍有许多工作可做.希望对此有兴趣的计算数学工作者，能继续开展这方面的研究工作.

如大家所知，现代计算工具的迅猛发展，已经促成“离散数学要算法化，计算数学要软件化”的趋势要求.如此说来，作为数值分析或计算方法分支的数值积分法也必须走向软件化.因此，从本书中提供的各种方法和一系列公式出发，如何有选择、有搭配地去设计各种数学软件的问题，应该是有必要研究和很值得研究的课题.例如，关于处理激烈振荡函数积分计算的方法以及某些常用区域上的边界型求积法，如何搞成相应的软件就是值得考虑的问题.

如果这本书的题材能成为实际计算工作者的辅助工具，或者成为软件研究工作者的方法依据，那末此书也就起到它应有的一份作用了.但由于匆促成稿，对各章各节内容未及仔细推敲，故书中的疏忽差错或难避免，因此还希望读者不吝指正.最后，我们要对安徽教育出版社欣然出版本书以及合肥工业大学卢树铭副教授在编辑本书时所完成的细致工作表示诚挚感谢.

徐利治　周蕴时　何天晓

一九八四年元月

目　录

第三章　具有代数精度的降维展开公式

第四章　复域上的降维展开公式

第五章　精确的降维展开法

第一章 数值积分的代数方法

在这一章我们主要介绍以A. H. Stroud 等人为代表的欧美学派发展起来的代数方法. 他们使用的主要工具是矩阵代数，线性变换和多元直交多项式理论. 关于这些题材我们在《高维数值积分》一书中已经有过论述. 本章的基本内容是对前书的增补与延续.

§1. 记号与予备知识

我们认为读者已经熟悉 Riemann 意义下的高维积分的概念，并且也了解它们的一些简单性质.

以下，我们用小写的黑体字母表示向量，例如

$$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad \mathbf{u}_i=(u_{i,1},u_{i,2},\cdots,u_{i,n})$$

等等. 大写的黑体字母表示矩阵，例如$\mathbf{X}$，$\mathbf{A}$，$\mathbf{I}$等. $\mathbf{X}^T$表示矩阵$\mathbf{X}$的转置矩阵. $\mathbf{X}^{-1}$表示矩阵$\mathbf{X}$的逆矩阵. E_n表示实的n维欧氏空间；R_n，C_n等表示E_n中的区域，自然是$n\geqslant 2$.

为简单计，常使用记号

$$I(f)=I(f(x_1,x_2,\cdots,x_n))$$
$$=\int_{R_n}\omega(x_1,x_2,\cdots x_n)f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

特别

$$I(1)=\int_{R_n}\omega(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$I(x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n})=\int_{R_n}[\omega(x_1,x_2,\cdots,x_n)x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}]\times dx_1dx_2\cdots dx_n$$

其中α_1，α_2，$\cdots$，α_n为非负整数. 一般我们总是假定后两个积分是

存在的.

本章主要研究如下形式的求积公式

$$\int_{R_n} \omega(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \cong \sum_{i=1}^{N} A_i f(\mathbf{x}_i) \tag{1.1}$$

其中$\omega(\mathbf{x}) = \omega(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是权函数，一般情况下总假定$\omega(\mathbf{x}) \geqslant 0$且常常是$\omega(\mathbf{x}) \equiv 1$；$d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$；诸$\mathbf{x}_i$是$E_n$中的点，通常称它们为求积结点；诸$A_i$是不依赖于$f(\mathbf{x})$的常数，称为求积系数当然也可以用其它字母(例如，$B_1, B_2, \cdots, B_N$)表示求积系数；$N$表示求积公式(1.1)中含求积结点的个数.

我们称求积公式(1.1)右端的求积和与左端积分真值之差

$$\rho_N = \int_{R_n} \omega(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \sum_{i=1}^{N} A_i f(\mathbf{x}_i)$$

为求积余项或求积误差. 有时也将式(1.1)写成

$$\int_{R_n} \omega(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) dx = \sum_{i=1}^{N} A_i f(\mathbf{x}_i) + \rho_N \tag{1.2}$$

如果对于任意的单项式

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \qquad k_1 + k_2 + \cdots + k_n \leqslant d$$

近似等式(1.1)变成精确等式，并且至少有一个$(d+1)$次的单项式使得式(1.1)不能成为精确等式，则说求积公式(1.1)具有d次代数精度(或简称它是d次的求积公式)

我们经常用求积结点和求积系数来简单地表示一个求积公式.例如，可以将求积公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} f(x,y) dx dy$$

$$\cong \frac{\pi}{4}[f(1,0) + f(-1,0) + f(0,1) + f(0,-1)]$$

简单地写成

$$(1,0) \quad \frac{\pi}{4} \qquad\qquad (0,1) \quad \frac{\pi}{4}$$

$$(-1,0)\quad \frac{\pi}{4} \qquad\qquad (0,-1)\quad \frac{\pi}{4}$$

令$P_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和$P_{m,i}(x_1, x_2\cdots, x_n)$表示变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的次数为$m$的多项式；$Q_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和$Q_{m,i}(x_1,x_2, \cdots, x_n)$表示变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的次数不超过$m$的多项式. 现在介绍一点平面曲线的知识，以后要用它们.

设已知二个二元多项式$P_m(x, y)$和$P_s(x, y)$，考虑方程(平面曲线)

$$P_m(x,y)=0 \qquad P_s(x,y)=0$$

的公共零点(平面曲线的交集).

设$P_m(x,y)$有如下的分解式

$$P_m(x,y)=P_{m_1}(x,y)P_{m_2}(x,y)\cdots P_{m_k}(x,y)$$

$$m=m_1+m_2+\cdots+m_k,\ m_i\geqslant 1, \qquad i=1,2,\cdots,k$$

且P_{m_i}是不能再分解的了，亦即P_{m_i}是既约的. 显然，除了可能差一常数因子或P_{m_i}的排列顺序外，上述的分解是唯一的. 平面曲线

$$P_{m_1}(x,y)=0,\ \cdots,\ P_{m_k}(x,y)=0 \tag{1.3}$$

与平面曲线

$$P_m(x,y)=0 \tag{1.4}$$

叠合. 称式(1.3)中的曲线为曲线(1.4)的分支. 如果$P_m(x, y)$是既约的，则曲线(1.4)由单支组成. 我们总假定P_m与P_{m_i}的系数属于复数域. 因此，在特殊情况下，方程(1.4)可能没有实解.

例 1 令

$$P_m=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

则P_m总可以分解为

$$P_m=a_m(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)$$

并因此$P_m=0$有m个线性分支

$$x-x_1=0,\ \cdots,\ x-x_m=0$$

例 2 令 $P_2=x^2+a_{10}x+a_{01}y+a_{00}$，则容易证明 $P_2(x,y)$ 是既约的充分必要条件是 $a_{01}\neq 0$.

例 3 令$P_2=(x-y+1)^2$, $P_3(x^2+4x-y+1)(x-y+1)$. 则曲线$P_2=0$与$P_3=0$均由两支组成. 直线$(x-y+1)=0$是 $P_2=0$ 的二重支，是$P_3=0$的单重支，它是$P_2=0$与$P_3=0$的公共支.

如果二个曲线

$$P_m(x,y)=0 \quad 与 \quad P_s(x,y)=0 \tag{1.5}$$

有公共支，则方程 $P_m(x,y)=0$与 $P_s(x,y)=0$ 有无穷多个公共解.

定理 1 (Bezout) 如果式(1.5)中的二曲线无公共支，则它们恰好有 ms 个交点.

自然，式 (1.5) 中二曲线的交点可能是复的，也可能是重交点，也可能交于无穷远点. 值得注意的是，对于重交点来说，计数时几重交点就算几个交点.

定理 2 如果式 (1.5) 中二曲线交点的个数多于ms个，则它们有公共支.

定理 2 是定理 1 的弱形式，以后我们也要用到. 作为定理 2 的应用，我们有下面的

定理 3 有 $(m+1)(m+2)/2$个点 $m_i=(x_i,y_i)$，不全在曲线 $Q_m(x,y)=0$上.

证 取不在一条直线上的三个点 m_1，m_2，m_3. 另取一直线 $Q_{1,1}(x,y)=0$，它不通过点 m_1，m_2，m_3，并于其上取三个点 m_4，m_5，m_6. 点m_1，m_2，…，m_6一定不在一条二次曲线$Q_2=0$上. 假若不然，依定理 2，Q_2与$Q_{1,1}$有公共支，并因此 $Q_{1,1}$ 是Q_2的一个分支. 从而Q_2是两个线性因子的乘积. 这是不可能的，因为m_1, m_2, m_3不在一条直线上.

今再取一直线$Q_{1,2}=0$，它不通过点 m_1，m_2，…，m_6 并于其上取四个点m_7，m_8，m_9，m_{10}. 点m_1，m_2，…，m_{10}一定不在一条

三次曲线$Q_3=0$上.假若不然，依定理2，$Q_{1,2}$是Q_3的一个分支，亦即$Q_3=Q_2\cdot Q_{1,2}$.因为m_1，m_2，…，m_6不在$Q_{1,2}=0$上，故它们必在$Q_2=0$上.但是，上面已经证明这是不可能的.如此继续下去，可以找到$(m+1)(m+2)/2$个不全在曲线$Q_m=0$上的点.证毕.

上述的一些结果已被推广到多个变量的情形.我们只用到二个变量的Bezout定理.

我们还将用到下面的

定理 4 假若P_m和P_s无公共支，且它们的公共零点$(x_i,\ y_i)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ ms)$是不同的.又设$P_k(x,\ y)$是一个不恒等于零的多项式，$(x_i,\ y_i)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ ms)$是$P_k(x,\ y)$的零点，则$k\geqslant\min(m,\ s)$，并且有多项式$Q_{k-m}$和$Q_{k-s}$使得

$$P_k=Q_{k-m}P_m+Q_{k-s}P_s$$

定理4是Max Noether定理的简单形式，Q_{k-m}和Q_{k-s}中之一(不是两个)允许恒等于零.

Max Noether定理的证明可参阅J.G.Semple和L.Roth的书([86]，p.94—96)；Bezout定理的证明可参阅[87].

§2. Tchakaloff 定理

设$R_n\subset E_n$是有界的，$\omega(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$在$R_n$上是非负的；我们将证明，对于任给的正整数$d>1$，恒可以构造$d$次代数精度的(1.1)型的求积公式，并且求积系数$A_i$全为正数，求积结点$\mathbf{x}_i=(x_{1,i},\ x_{2,i},\ \cdots,\ x_{n,i})$均含于$R_n$内，结点个数最多需要$N(n,\ d)=(n+d)!/n!d!$.这个结论是由Tchakaloff证明的[83].为简明计，我们假定$n=2$.对于$n>2$的情形，证明是完全一样的.

首先引进如下的记号与定义：

(i) $\boldsymbol{\phi}_N=(0,0,\cdots,0)$表示$E_N$的原点

(ii) $\mathbf{u}=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_N)$，$\mathbf{v}=(v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_N)$是$E_N$的两个点，则$(\mathbf{u},\mathbf{v})$表示内积

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_N v_N$$

$\sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}$ 表示 u 与 ϕ_N 的距离.

(iii) $l_{\phi,u}$ 表示联结 ϕ_N 和 u 的直线段. $\theta_{u,v}$表示$l_{\phi,u}$ 与$l_{\phi,v}$之间的夹角，由解析几何知

$$\cos \theta_{u,v} = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}\sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}}$$

定义 1 E_N 的超平面 $\mathscr{H}_{N-1}$ 是E_N的$(N-1)$维子空间(一般并不假定 $\phi_N \in \mathscr{H}_{N-1}$).

定义 2 称E_N的点集$\mathscr{K}$是凸的，如果对于任意的实数 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，$\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2 \in \mathscr{K}$，蕴涵着 $\lambda \mathbf{v}_1 + (1-\lambda)\mathbf{v}_2 \in \mathscr{K}$.

显然，这个关于凸集的定义是笛卡儿平面上凸集合概念的拓广.

定义 3 称E_N 的点集$\mathscr{K}$为凸锥，如果对于每对实数$\lambda_1 \geqslant 0$，$\lambda_2 \geqslant 0$ 和 $\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2 \in \mathscr{K}$ 有 $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \in \mathscr{K}$.

如果$\mathscr{K}$是凸锥，则依定义，$\phi_N \in \mathscr{K}$. 显然如果 $\mathscr{K}$ 不是全空间，则 ϕ_N 是它的边界点. 自然，可以将 ϕ_N 看成 $\mathscr{K}$ 的顶点.

定理 5 (Minkowski) 令$\mathscr{K}$是E_N中的一个非空闭凸集，且$\mathscr{K}$不是E_N. 若$\mathbf{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_N)$是$E_N$中不属于 $\mathscr{K}$ 的任意点，则有超平面 $\mathscr{H}$ 将 c 与 $\mathscr{K}$ 隔开.

定理 5 的证明可以参阅 T. Botts 的文章【76】.

定理 6 若 $\mathscr{K}$ 是E_N中的一个闭凸锥，且$\mathscr{K}$不是E_N. 又若$\mathbf{c} \in E_N \setminus \mathscr{K}$，则对所有的 $\mathbf{v} \in \mathscr{K}$，有 $\mathbf{u} \in E_N$ 使得

$$(\mathbf{c}, \mathbf{u}) < 0, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \geqslant 0$$

证 依定理 5，有超平面$\mathscr{H}_{N-1}$将c与$\mathscr{K}$隔开. 因为ϕ_N是$\mathscr{K}$的顶点，可以取$\mathscr{H}_{N-1}$使得 $\phi_N \in \mathscr{H}_{N-1}$. 令 u 是一个和 $\mathscr{K}$ 同属$\mathscr{H}_{N-1}$的一侧的点，并且使得线$l_{\phi,u}$垂直于$\mathscr{H}_{N-1}$. 若 $\mathbf{v} \in \mathscr{K}$，则$\theta_{u,v} \leqslant 90°$. 因此$\cos\theta_{u,v} \geqslant 0$，并从而$(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \geqslant 0$. 又因为$\theta_{c,u} > 90°$，所以$(\mathbf{c}, \mathbf{u}) < 0$，证毕.

定理 7 令 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_p$是 E_N 中的向量，且

$$\mathbf{u}=\lambda_1\mathbf{v}_1+\lambda_2\mathbf{v}_2+\cdots+\lambda_p\mathbf{v}_p$$

其中λ_1, λ_2, …, λ_p是正的.若$p>N$，则$\mathbf{u}$可以用 $\mathbf{v}_i$ 中的 $k(\leqslant N)$ 个线性表示，且系数是非负的.

证 若 $p>N$，则 $\mathbf{v}_i$ 是线性相关的，亦即有不全为零的 α_1, α_2, …, α_p使得

$$\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2+\cdots+\alpha_p\mathbf{v}_p=0$$

不失一般性，可以认为至少有一个 α_i 是正的，因此$\mu=\max\limits_i(\alpha_i/\lambda_i)>0$. 显然

$$\mathbf{u}=\xi_1\mathbf{v}_1+\xi_2\mathbf{v}_2+\cdots+\xi_p\mathbf{v}_p$$

$$\xi_i=(\mu\lambda_i-\alpha_i)/\mu\geqslant 0 \qquad i=1, 2, \cdots, p$$

且ξ_i中至少有一个是零.从而，$\mathbf{u}$可以用$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_p$中的 $p_1(\leqslant p-1)$ 个线性表示，且系数非负. 若 $p_1\leqslant N$，则已经证明了定理的结论；若 $p_1>N$，则可以重复上述的论证过程. 证毕.

令$\mathscr{A}$是一个抽象集合，并假定对每一个$s\in\mathscr{A}$，均有单位向量 $\mathbf{v}_s\in E_N$ 与之对应. 全体 $\mathbf{v}_s$ 作成的集合用 $\mathscr{V}(\mathscr{A})$表示.

定义 4 如果 E_N 中的向量集 $\mathscr{V}(\mathscr{A})$有以下四条性质，则称它为基本向量集：

(i) $\mathscr{V}(\mathscr{A})$是有界的，亦即对所有的 $\mathbf{v}_s\in\mathscr{V}(\mathscr{A})$，有实常数 L 使得 $\sqrt{(\mathbf{v}_s,\mathbf{v}_s)}\leqslant L$

(ii) $\mathscr{V}(\mathscr{A})$是闭的，并因此它是紧致的

(iii) $\mathscr{V}(\mathscr{A})$含有 N 个线性无关的向量

(iv) 对所有的$\mathbf{v}_s\in\mathscr{V}(\mathscr{A})$，有向量$\mathbf{w}\in E_N$使得$(\mathbf{v}_s, \mathbf{w})>0$.

注意，若 $\mathscr{V}(\mathscr{A})$是基本向量集，并且对所有的 $\mathbf{v}_s\in\mathscr{V}(\mathscr{A})$有$(\mathbf{v}_s, \mathbf{w})>0$，则 $\inf\limits_s(\mathbf{v}_s, \mathbf{w})>0$. 事实上，假若不然，亦即

$$\inf_s(\mathbf{v}_s, \mathbf{w})=0$$

则可以找到$\mathscr{V}(\mathscr{A})$的子列$\{\mathbf{v}_{si}\}$使得

$$\lim_{i=\infty}(\mathbf{v}_{si},\mathbf{w})=0$$

因为$\mathscr{V}(\mathscr{A})$是紧致的，$\{\mathbf{v}_{si}\}$有一个收敛的子列，不妨设收敛于$\mathbf{v}_{so}\in\mathscr{V}(\mathscr{A})$，这将导至$(\mathbf{v}_{so},\ \mathbf{w})=0$.矛盾.

定义 5 给定E_N中的一个基本向量集$\mathscr{V}(\mathscr{A})$，我们定义一个新的向量集$\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$，它的元素$\mathbf{u}\in E_N$，并且是$\mathscr{V}(\mathscr{A})$中$k(\leqslant N)$个向量的线性组合(系数非负).换言之，$\mathbf{u}\in\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$的充分必要条件是有$\mathbf{v}_{si}\in\mathscr{V}(\mathscr{A})$和实数$b_i\geqslant 0$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$，使得

$$\mathbf{u}=b_1\mathbf{v}_{s1}+b_2\mathbf{v}_{s2}+\cdots+b_N\mathbf{v}_{sN}$$

定理 8 $\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$是$E_N$中的闭凸锥.

证 先证明$\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$是闭的.考察向量集$\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$的序列$\{\mathbf{u}_i\}$：

$$\mathbf{u}_i=b_{i1}\mathbf{v}_{si1}+b_{i2}\mathbf{v}_{si2}+\cdots+b_{iN}\mathbf{v}_{siN}$$

$$\mathbf{v}_{sij}\in\mathscr{V}(\mathscr{A}),\ b_{ij}\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,N,\ i=1,2,\cdots$$

它收敛于向量$\mathbf{u}_0\in E_N$.我们需要证明$\mathbf{u}_0\in\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$.

首先证明，对于每一个j,序列$\{b_{ij}\}(i=1,\ 2,\ \cdots)$是有界的.令$\mathbf{w}$对全体$\mathbf{v}_s\in\mathscr{V}(\mathscr{A})$满足$(\mathbf{v}_s,\ \mathbf{w})>0$，则

$$(\mathbf{u}_i,\mathbf{w})=\sum_{j=1}^{N}b_{ij}(\mathbf{v}_{ij},\mathbf{w})\geqslant b_{ij}(\mathbf{v}_{sij},\mathbf{w})\geqslant b_{ij}\inf_s(\mathbf{v}_s,\mathbf{w})\geqslant 0$$

因为$\inf_s(\mathbf{v}_s,\mathbf{w})>0$，所以

$$0\leqslant b_{ij}\geqslant\frac{(\mathbf{u}_i,\mathbf{w})}{\inf_s(\mathbf{v}_s,\mathbf{w})}$$

由于$\{\mathbf{u}_i\}$收敛于$\mathbf{u}_0$，所以$\{\mathbf{u}_i\}$是有界的，从而序列$\{(\mathbf{u}_i,\ \mathbf{w})\}$是有界的.依 Cauchy 不等式$(\mathbf{u}_i,\ \mathbf{w})^2\leqslant(\mathbf{u}_i,\ \mathbf{u}_i)(\mathbf{w},\ \mathbf{w})$知，对于每一个$j$，集合$\{b_{ij}\}$是有界的.

综上所述，有k的整数序列使得

$$\lim_{k\to\infty} b_{kj}=b_j \qquad \lim_{k\to\infty} \mathbf{v}_{skj}=\mathbf{v}_{sj}$$

这意味着

$$\mathbf{u}_0=b_1\mathbf{v}_{s1}+b_2\mathbf{v}_{s2}+\cdots+b_N\mathbf{v}_{sN}\in\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$$

从而 $\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$是闭集.

对于任意的 $\lambda_1\geqslant 0$，$\lambda_2\geqslant 0$，如果 $\mathbf{u}_1$，$\mathbf{u}_2\in\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$，则依定理 7，$\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2\in\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$. 证毕.

定义 6 我们说向量 $\mathbf{c}\in E_N$ 关于基本集合 $\mathscr{V}(\mathscr{A})$ 是正的，如果对于满足 $(\mathbf{v}_s,\mathbf{w})\geqslant 0(\mathbf{v}_s\in\mathscr{V}(\mathscr{A}))$ 的每一个 $\mathbf{w}$，均有 $(\mathbf{c},\mathbf{w})\geqslant 0$.

定理 9 如果 $\mathbf{c}$ 关于基本集合 $\mathscr{V}(\mathscr{A})$ 是正的，则 $\mathbf{c}\in\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$.

证 令 $\mathbf{c}\in E_N\setminus\mathscr{K}_N(\mathscr{A})$. 依定理6，有向量 $\mathbf{w}\in E_N$，使得对于全体 $\mathbf{v}_s\in\mathscr{V}(\mathscr{A})$有

$$(\mathbf{c},\mathbf{w})<0 \qquad (\mathbf{v}_s,\mathbf{w})\geqslant 0$$

这样，关于集合 $\mathscr{V}(\mathscr{A})$，$\mathbf{c}$ 就不是正的了。

现在，我们已经能够证明下面的

定理 10 (Tchakaloff, 1957) 令R_2是 E_2 中的有界闭区域；$\omega(x,y)$在 R_2 上非负可积，且

$$0<I(1)<\infty$$

d 是固定的正整数. 则可以构造 d 次代数精度的求积公式

$$\int_{R_2}\omega(x,y)Q_d(x,y)\,dx\,dy=\sum_{i=1}^{N}A_iQ_d(x_i,y_i)$$

并且它有以下三条性质：

(i) $N\leqslant N(2,d)=(d+1)(d+2)/2$

(ii) $(x_i,y_i)\in R_2 \qquad i=1,2,\cdots,N$

(iii) $A_i(i=1,2,\cdots,N)$ 是正的.

证 定义 $\mathscr{V}(R_2)$是由如下形式的N维向量作成的集合：

$$\mathbf{v}_s=(1,\ x_s,\ y_s,\ x_s^2,\ x_sy_s,\ \cdots,\ y_s^d)$$

其中$(x_s,\ y_s)\in R_2$. 由于R_2是闭的，有界的，所以$\mathscr{V}(R_2)$亦是闭的，有界的. 对于全体$\mathbf{v}_s\in\mathscr{V}(R_2)$，向量

$$\mathbf{w}=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0)\in E_N$$

满足$(\mathbf{v}_s,\mathbf{w})>0$.

定义$L_n^d(\mathbf{p})=\{\mathbf{p}:\ 0\leqslant p_1+p_2+\cdots+p_n\leqslant d\}$，例如，$L_2^2(p)=\{(0,0),\ (1,\ 0),\ (2,\ 0),\ (0,1),\ (1,1),\ (0,2)\}$. 又定义$L_n^d(\mathbf{m}_p)=\{(m_{p_1},\ m_{p_2},\ \cdots,\ m_{p_n}):\mathbf{p}\in L_n^d(\mathbf{p})\}$. $L_n^d(\mathbf{m}_p)$也可以看成是$L_n^d(\mathbf{p})$的推广. 例如，若$m_0=0.1$，$m_1=0.4$，$m_2=0.5$，则$L_2^2(\mathbf{m}_p)=\{(0.1,\ 0.1),\ (0.4,\ 0.1),\ (0.5,\ 0.1),\ (0.1,\ 0.4),\ (0.4,\ 0.4),\ (0.1,\ 0.5)\}$.

因为$0<I(1)<\infty$，所以R_2内部是非空的，且R_2含有点集$L_2^d(m_p)$. 因为$\det\mathbf{W}_n^d\neq 0$，所以$\mathscr{V}(R_2)$含有N个线性无关的向量，从而$\mathscr{V}(R_2)$是E_N中的基本向量集. 令$\mathscr{K}_N(R_2)$表一向量集，它的元素$\mathbf{u}\in E_N$，且可以写成

$$\mathbf{u}=b_1\mathbf{v}_{s1}+b_2\mathbf{v}_{s2}+\cdots+b_N\mathbf{v}_{sn}$$

$$\mathbf{v}_{si}\in\mathscr{V}(R_2)\qquad b_i\geqslant 0\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

依定理8 $\mathscr{K}_N(R_2)$是一个闭凸锥，并且$\mathscr{K}_N(R_2)$不是E_N，因为它不含向量$(-1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$.

给定一个次数$\leqslant d$的多项式$Q_d(x,\ y)$

$$Q_d=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+\cdots+a_{0d}y^d$$

作与之对应的向量

$$\mathbf{w}_Q=(a_{00},\ a_{10},\ a_{01},\ a_{20},\ a_{11},\ \cdots,\ a_{0d})$$

则对于给定的$(x_s,\ y_s)\in R_2$，$(\mathbf{w}_s,\ \mathbf{w}_Q)$是$Q_d$在$(x_s,\ y_s)$处的值. 定义

$$\mathbf{c}=(c_{00},\ c_{10},\ c_{01},\ c_{20},\ c_{11},\ \cdots,\ c_{0d})$$

其中$c_{\alpha\beta}=I(x^\alpha y^\beta)$，则

$$(\mathbf{c}, \mathbf{w}_Q) = \int_{R_2} \omega(x,y) Q_d(x,y) dx\, dy$$

注意，若对于全体 $(x_s, y_s) \in R_2$，$(\mathbf{v}_s, \mathbf{w}_q) \geqslant 0$，则 $(\mathbf{c}, \mathbf{w}_q) \geqslant 0$. 依定义6，关于 $\mathscr{V}(R_2)$，$\mathbf{c}$是正的. 依定理9，$\mathbf{c} \in \mathscr{K}_N(R_2)$. 因此，有$\mathbf{v}_{si} \in \mathscr{V}(R_2)$和实数$A_i \geqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, N$，使得

$$\mathbf{c} = A_1 \mathbf{v}_{s1} + A_2 \mathbf{v}_{s2} + \cdots + A_N \mathbf{v}_{sn}$$

从而，对任意的 $Q_d(x, y)$

$$(\mathbf{c}, \mathbf{w}_Q) = A_1(\mathbf{v}_{s1}, \mathbf{w}_Q) + A_2(\mathbf{v}_{s2}, \mathbf{w}_Q) + \cdots + A_N(\mathbf{v}_{sn}, \mathbf{w}_Q)$$

上式是定理结论的另一种写法. 证毕.

在【83】中，Tchakaloff还证明，在具有性质(i),(ii)和(iii)的，形式如定理10给出的求积公式中，一般说来，结点数N不能再减少. 换言之，有区域R_2和正整数d，使得当结点个数少于$N=N(2, d)$时，不能构造出d次精度的求积公式.

§3. 正系数求积公式的构造法

令$\omega(x, y)=1$，Davis[77]给出了一个构造具有性质(i),(ii),(iii)的求积公式的方法. 他的方法是构造性的，不需要凸集理论，并且也是对于$\omega(x,y)=1$的情形再次证明了Tchakaloff定理的结论. 以下，我们还是仅以二维情形为例，其实所得结论极易推广到高维情形.

若将计算定积分的求积公式取成Gauss求积公式，则由此而产生的乘积型求积公式的求积系数是正的，并且求积结点是区域的内点.

Davis 的方法依赖于某些d次的求积公式，这些求积公式的求积系数是正的，并且求积结点是区域的内点(但是，求积结点个数多于$N(n, d)$). 因此，乘积型求积公式可以作为Davis方法的起点(当然，积分区域是有限制的). 事实上，对于一些n和d而言，d次的 Gauss 乘积公式的结点个数已经低于$N(n,d)$. 具体情形见

下表：

n	d
2	任意的 d
3	任意的 d
4	3，5，7，9，11
5	3，5
6	3
7	无 d

定理 11 设已知一具有性质(ii)，(iii)的求积公式，但它的结点个数 $N^* > N(2, d) = (d+1)(d+2)/2$，则有 (x_i, y_i) 的子集 (x_i^*, y_i^*) $(i=1, 2, \cdots, N(2, d))$ 和非负系数 C_i 使得

$$\int_{R_2} \omega(x, y) Q_d(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^{N(2,d)} C_i Q_d(x_i^*, y_i^*)$$

证 设具有性质(ii)，(iii)的求积公式为

$$\int_{R_2} \omega(x, y) Q_d(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^{N^*} A_i Q_d(x_i, y_i)$$

考虑如下的 $E_{N(2,d)}$ 的向量

$$\mathbf{c} = (c_{00}, c_{10}, c_{01}, c_{20}, c_{11}, \cdots, c_{0d})$$

$$c_{\alpha\beta} = I(x^\alpha y^\beta)$$

$$\mathbf{v}_i = (1, x_i, y_i, x_i^2, x_i y_i, \cdots, y_i^d)$$

$$i = 1, 2, \cdots, N^*$$

上述求积公式具有 d 次代数精度等价于

$$\mathbf{c} = A_1 \mathbf{v}_1 + A_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + A_{N^*} \mathbf{v}_{N^*}$$

依定理 7，$\mathbf{c}$ 是可以表示为诸 $\mathbf{v}_i$ 的线性组合的，并且其中系数非

负，$\mathbf{v}_i$的个数最多是$N(2,\ d)$个.证毕.

现在，我们给出Davis构造正系数，求积结点为区域内点的d次求积公式的方法.令$N=N(2,\ d)=(d+1)(d+2)/2$，又令

$$\xi_1(x,y)=1,\qquad \xi_2(x,y)=x$$
$$\xi_3(x,y)=y,\qquad \xi_4(x,y)=x^2$$
$$\xi_5(x,y)=xy,\ \cdots,\qquad \xi_N(x,y)=y^d$$

具体构造分成以下八步：

1. 选择R_2的N个内点

$$\mathbf{M}_j=(x_j,y_j)\qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

使得$N\times N$矩阵

$$\mathbf{X}_N=[\xi_i(\mathbf{M}_j)]$$

是满秩的. $I(1)>0$意味着R_2的内部是非空的.因此，对某些实数m_0，m_1，$\cdots$，m_p，R_2含有点集$L_2^d(\mathbf{m}_p)$.这样，我们可以将$\mathbf{M}_j$取成$L_2^d(\mathbf{m}_p)$的点. 选择$\mathbf{M}_j$使得矩阵$\mathbf{X}_N$与矩阵$\mathbf{W}_2^d$重合（行的顺序可以不一致）. 此处，矩阵$\mathbf{W}_n^d\equiv\mathbf{W}_n^d(m_{p1}^{\alpha 1}m_{p2}^{\alpha 2}\cdots m_{pn}^{\alpha n})$，例如

$$\mathbf{W}_2^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ m_0 & m_1 & m_2 & m_0 & m_1 & m_0\\ m_0^2 & m_1^2 & m_2^2 & m_0^2 & m_1^2 & m_0^2\\ m_0 & m_0 & m_0 & m_1 & m_1 & m_2\\ m_0^2 & m_1m_0 & m_2m_0 & m_0m_1 & m_1^2 & m_0m_2\\ m_0^2 & m_0^2 & m_0^2 & m_1^2 & m_1^2 & m_2^2\end{pmatrix}$$

容易证明

$$\begin{aligned}\det\mathbf{W}_n^d=&[(m_d-m_{d-1})(m_d-m_{d-2})\cdots(m_d-m_0)]^{e_d}\\ &\times[(m_{d-1}-m_{d-2})(m_{d-1}-m_{d-3})\cdots(m_{d-1}-m_0)]^{e_{d-1}}\\ &\times\cdots\times[(m_2-m_1)(m_2-m_0)]^{e_2}(m_1-m_0)^{e_1}\end{aligned}$$

其中$e_{d-k}=nN(n-1,\ k)$，$\qquad k=0,\ 1,\ \cdots,\ d-1.$

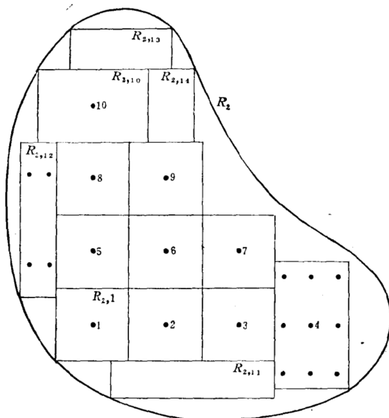


图 1.1

余下的步骤以上图为例来说明，此处$d=3$，$N=10$，且点$\mathbf{M}_1$，$\mathbf{M}_2$，…，$\mathbf{M}_{10}$已用数码1，2，…，10标出.

2．在每个点$\mathbf{M}_j$附近构造矩形$R_{2,j}$，矩形$R_{2,j}$以$\mathbf{M}_j$为中心，整个的$R_{2,j}$位于R_2内部，并且诸$R_{2,j}$不交叠.

3．在每个矩形$R_{2,j}$上，构造Gauss-Legendre乘积公式，表示为GL_j. 对每一个j，使GL_j含k^2个点，k是奇数且$2k-1\geqslant d$. $\mathbf{M}_j$是GL_j的结点之一，令与$\mathbf{M}_j$对应的系数是$A_j^*>0$，$j=1$，2，…，N. 在上图中，取$k=3$，使得每个GL_j为五次求积公式. 作为例子，在上图中，我们标出了GL_4的求积结点.

4. 选择$\delta>0$，使得

$$\delta \leqslant \frac{\min(A_1^*, A_2^*, \cdots, A_N^*)}{\|\mathbf{X}_N^{-1}\| M} \tag{1.6}$$

$$M = \max_{1\leqslant i\leqslant N} \sup_{R_2} |\xi_i(x,y)|$$

并且，若 $\mathbf{D}$ 是一个 $N\times N$ 矩阵(元素为d_{ij})，则$\|\mathbf{D}\|$表矩阵模

$$\|\mathbf{D}\| = \max_i \sum_j |d_{ij}|$$

5. 选取足够多的附加矩形 $R_{2,j}$，$j=N+1$，$\cdots$，q，使得它们均在 R_2 内，它们之间是不重叠的，与 $R_{2,j}(j=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ 亦是不重叠的，并且

$$\int_{R_2 \setminus R_2^*} dx\, dy \leqslant \delta$$

其中 $R_2^* = R_{2,1} U R_{2,2} U \cdots U R_{2,q}$. 在上图中，我们假定只须增加四个矩形$R_{2,11}$，$\cdots$，$R_{2,14}$就可以满足上面的不等式了. 现在定义

$$C_i^* = \int_{R_2 \setminus R_2^*} \xi_i(x,y)\, dx dy$$

$$= \int_{R_2} \xi_i\ (x,y)\ dx dy - \int_{R_2^*} \xi_i(x,y) dx dy$$

并注意，当 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$ 时，

$$|C_i^*| \leqslant \int_{R_2 \setminus R_2^*} |\xi_i(x,y)|\, dx dy \leqslant M\delta \tag{1.7}$$

6. 在每个矩形$R_{2,j}(j=N+1,\ \cdots,\ q)$中构造代数精度$\geqslant d$的Gauss-Legendre乘积公式. 我们记这些公式为$\mathrm{GL}_j(j=N+1,\cdots,q,)$并假定

$$\mathbf{M}_j = (x_j, y_j) \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ N^*$$

是$\mathrm{GL}_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ q)$的全部结点. 在上面的点列中，除了首$N$个点是予先确定的外，点的排列顺序是无关紧要的. 我们用A_j^*表示与$\mathbf{M}_j$相对应的求积系数. 在上图中，对$R_{2,11}$，$\cdots$，$R_{2,14}$，可以

取四点求积公式．现在，对于R_2^*，我们得到一个d次的求积公式

$$\int_{R_2^*}\xi_i(x,\ y)dxdy=\sum_{j=1}^{N}A_j^*\xi_i(\mathbf{M}_j)+\sum_{j=N+1}^{N^*}A_j^*\xi_i(\mathbf{M}_j)$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

在上面的公式中A_j^*是正的，$\mathbf{M}_j$是R_2^*的内点．我们还必须对R_2给出一个同样的公式．

7．因为$\mathbf{X}_N$是满秩的，所以能够求得系数B_j，使得对于$R_2\setminus R_2^*$有一个d次的求积公式

$$c_i^*=\iint_{R_2\setminus R_2^*}\xi_i(x,\ y)dxdy=\sum_{j=1}^{N}B_j\,\xi_i(\mathbf{M}_j)$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

B_j由下面的方程组确定

$$\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\\vdots\\B_N\end{pmatrix}=[\mathbf{X}_N^{-1}]\begin{pmatrix}c_1^*\\c_2^*\\\vdots\\c_N^*\end{pmatrix}$$

上述矩阵模的一个熟知性质是

$$\max_i|B_i|\leqslant\|\mathbf{X}_N^{-1}\|\max_i|c_i^*| \qquad (1.8)$$

联合式(1.6)，(1.7)和(1.8)，得到

$$\max_i|B_i|\leqslant\min(A_1^*,\ A_2^*,\ \cdots,\ A_N^*)$$

8．综合上述，对于$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$得到

$$\int_{R_2}\xi_i dxdy=\int_{R_2\setminus R_2^*}\xi_i dxdy+\int_{R_2^*}\xi_i dxdy$$

$$=\sum_{j=1}^{N}B_j\xi_i(\mathbf{M}_j)+\sum_{j=1}^{N}A_j^*\xi_i(\mathbf{M}_j)+\sum_{j=N+1}^{N^*}A_j^*\xi_i(\mathbf{M}_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{N}(B_j+A_j^*)\xi_i(\mathbf{M}_j)+\sum_{j=N+1}^{N^*}A_j^*\xi_i(\mathbf{M}_j)$$

上面的求积公式确定了一个R_2上的d次求积公式，它的全部结点是R_2的内点，并且全体求积系数非负.

§4. 多元直交多项式

在一元函数的平方逼近理论与数值积分理论中，直交函数系与直交多项式系起了重要的作用. 我们知道平方逼近的方法是构造近似函数的一个简便易行的好方法，所以在数值分析中它占有重要的地位. 虽然从逼近阶来看，一致逼近显得优越些，可是由于它难于实现，所以许多时候人们宁愿使用平方逼近的方法而不使用一致逼近的方法. 即使仅从逼近阶来看，Lebesgue定理告诉人们，用平方逼近方法得到的近似函数比用一致逼近方法得到的近似函数也不是差得很远.

1956年，В. И. Крылов 证明了一个很漂亮的定理：设$f(x)$在$(-1, 1)$上绝对连续，则以 Чебышев 多项式零点为插值结点的 Lagrange 插值多项式序列一致收敛于$f(x)$. 我们知道，Чебышев 多项式系是直交多项式系. 这从另一侧面说明了直交多项式系的重要性.

数值积分中的Gauss 型求积公式理论更清楚地说明了研究直交多项式的必要性. 我们知道，即使$f(x)$是有限区间$[a,b]$上的连续函数，关于积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

的n点 Newton-Cotes 求积公式序列也不一定收敛于积分的真值. 然而，当将求积结点选为$[a,b]$区间上的直交多项式的零点时，内插型求积公式(即 Gauss型求积公式)不但有最高的代数精度，而且当被积函数在$[a,b]$区间上连续时求积公式序列收敛于积分的真值.

以上提到的事实说明了直交函数系，特别是直交多项式系在

数值分析中所起的不容忽视的作用．正是由于这些原因，人们一直希望能够建立多元直交多项式的理论，并应用它来解决多元数值分析中的一些问题．遗憾的是，时至今日所得结果并不多．Jackson给出了多元直交多项式的一般理论；Radon首先利用多元直交多项式构造了高维求积公式．近年来，Мысовских，Stroud等人也得到了一些多元直交多项式与高维求积公式之间关系的结果．在以下各节，分别予以介绍．

设R_n是n维欧氏空间中的区域．容易证明，次数$\leqslant d$的n元单项式的个数是$N(n,\ d)=(n+d)!/(n!d!)$；而不同的次数为d的n元单项式的个数是$N(n-1,\ d)=(n+d-1)!/(n-1)!d!$．令$P_d$表示次数恰好为$d$的$n$元多项式；$Q_{d-1}$表示次数$\leqslant d-1$的$n$元多项式，则有下述定理成立：

定理 12 对于给定的R_n和权函数$W(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，恰好有

$$N(n-1,\ d)=\frac{(n+d-1)!}{(n-1)!d!}$$

个线性无关的多项式P_d，它们中的每一个在R_n上关于权函数$W(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$与所有的多项式$Q_{d-1}$直交，亦即，它们中的每一个都满足下列等式

$$\int_{R_n}[W(x_1,x_2,\cdots,x_n)P_d(x_1,x_2,\cdots,x_n)Q_{d-1}(x_1,x_2,\cdots,x_n)]$$

$$\times dx_1dx_2\cdots dx_n=0$$

证 为简单计，我们仅就$n=2$，$d=3$的情形证明上述结论．一般情形的证明是类似的．我们将指出有四个多项式

$$P^{3,0}=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+x^3$$
$$P^{2,1}=b_{00}+b_{10}x+b_{01}y+b_{20}x^2+b_{11}xy+b_{02}y^2+x^2y$$
$$P^{1,2}=d_{00}+d_{10}x+d_{01}y+d_{20}x^2+d_{11}xy+d_{02}y^2+xy^2$$
$$P^{0,3}=e_{00}+e_{10}x+e_{01}y+e_{20}x^2+e_{11}xy+e_{02}y^2+y^3$$

与全体 $Q_2(x,y)$ 直交.

为了证明 $P^{3,0}$与全体Q_2直交，只需证明它与 1，x，y，xy，x^2，y^2 直交. 这将导至关于 $P^{3,0}$ 的六个待定系数的线性方程组

$$\begin{pmatrix} c_{00} & c_{10} & c_{01} & c_{20} & c_{11} & c_{02} \\ c_{10} & c_{20} & c_{11} & c_{30} & c_{21} & c_{12} \\ c_{01} & c_{11} & c_{02} & c_{21} & c_{12} & c_{03} \\ c_{20} & c_{30} & c_{21} & c_{40} & c_{31} & c_{22} \\ c_{11} & c_{21} & c_{12} & c_{31} & c_{22} & c_{13} \\ c_{02} & c_{12} & c_{03} & c_{22} & c_{13} & c_{04} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{20} \\ a_{11} \\ a_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{30} \\ -c_{40} \\ -c_{31} \\ -c_{50} \\ -c_{41} \\ -c_{32} \end{pmatrix}$$

其中 $c_{\alpha\beta} \equiv I(x^\alpha y^\beta) = \int_{R_2} W(x,y)x^\alpha y^\beta dxdy$. 我们用 $\mathbf{I}_{2,2}$ 表示上述方程组中的系数矩阵，下面的定理12说明 $\mathbf{I}_{2,2}$是满秩的，因此上述方程组有唯一解，亦即$P^{3,0}$ 存在且唯一.

同理，通过解线性方程组可以得到$P^{2,1}$，$P^{1,2}$，$P^{0,3}$. 它们的系数矩阵均是 $\mathbf{I}_{2,2}$. 证毕.

定理 13 矩阵 $\mathbf{I}_{2,2}$ 是满秩的.

证 假设这个矩阵不是满秩的，则有不全为零的常数a_{00}，$_{10}$，a_{01}，a_{20}，a_{11}和a_{02}与 $\mathbf{I}_{2,2}$ 的行向量的乘积之和为一个零向量. 这意味着，若记

$$Q_2 \equiv a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$$

则

$$\int_{R_2} W(x,y)Q_2(x,y)dxdy = 0$$

$$\int_{R_2} W(x,y)xQ_2(x,y)dxdy = 0$$

$$\int_{R_2} W(x,y)yQ_2(x,y)dxdy = 0$$

$$\int_{R_2} W(x,y)x^2Q_2(x,y)dxdy=0$$

$$\int_{R_2} W(x,y)xyQ_2(x,y)dx\,dy=0$$

$$\int_{R_2} W(x,y)y^2Q_2(x,y)dx\,dy=0$$

用 a_{00} 乘第一个方程，用 a_{10} 乘第二个方程，如此等等，再将所得结果相加，得到

$$\int_{R_2} W(x,y)[Q_2(x,y)]^2dxdy=0$$

然而这是不可能的，所以 $\mathbf{l}_{2,2}$ 是满秩的.

定理 14 若$P_3(x,y)$是一个任意的三次多项式，并且在R_2上关于权$W(x,y)$与全体$Q_2(x,y)$直交，则$P_3(x,y)$是$P^{3,0}$，$P^{2,1}$，$P^{1,2}$和$P^{0,3}$的线性组合.

证 假定

$$P_3\equiv a_{30}x^3+a_{21}x^2y+a_{12}xy^2+a_{03}y^3+a_{20}x^2 \\ +a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{10}x+a_{01}y+a_{00}$$

与全体 Q_2 直交，则多项式

$$P_3-a_{30}P^{3,0}-a_{21}P^{2,1}-a_{12}P^{1,2}-a_{03}P^{0,3}$$

是次数$\leqslant 2$ 的多项式Q_2^*.若$Q_2^*\neq 0$，则依线性性，Q_2^*与自己直交，亦即

$$\int_{R_2} W(x,y)[Q_2^*(x,y)]^2dxdy=0$$

但这是不可能的，所以 $Q_2^*\equiv 0$，并因此

$$P_3=a_{30}P^{3,0}+a_{21}P^{2,1}+a_{12}P^{1,2}+a_{03}P^{0,3}$$

证毕.

我们称$P^{3,0}$，$P^{2,1}$，$P^{1,2}$和$P^{0,3}$为关于R_2和$W(x,y)$的三次直交多项式的基底.

关于一般的情形的结论是，对于给定的 R_n 和非负的权函数 $W(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，有确定的$N(n-1, d)$个形如

$$P^{a_1, a_2, \cdots, a_n} = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} + \text{低次项}$$

的d次多项式与所有的次数$\leqslant d-1$的多项式直交. 上面的$N(n-1, d)$个多项式是线性无关的，并且关于 R_n 和$W(x_1, x_2, \cdots, x_n)$与全体次数$\leqslant d-1$ 的多项式直交的任一d次多项式可以用它们的线性组合表示，因此它们构成关于 R_n 和$W(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的 d 次直交多项式的基底.

上式中，低次项的系数可以通过解$N(n,d-1) \cdot N(n,d-1)$阶线性方程组求出. 我们用 $\mathrm{I}_{n,d-1}$ 表示这个方程组的系数矩阵，$\mathrm{I}_{n,d-1}$ 是对称的且包含全体单项式积分

$$I(x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}) = \int_{R_n} [W(x_1, x_2, \cdots, x_n) x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}] \cdot dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$0 \leqslant a_1 + a_2 + \cdots a_n \leqslant 2d-2$$

类似于证明定理13，可以证明$\mathrm{I}_{n,d-1}$是满秩的，实际上$\mathrm{I}_{n,d-1}$还是正定的. 如果$W(x, y) \geqslant 0$(在R_2上)，$\mathrm{I}_{2,2}$也是正定的. 事实上，令

$$Q_2 = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2$$
$$a^T = (a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02})$$

则

$$\int_{R_2} W(x, y) [Q_2(x, y)]^2 dxdy = a^T \mathrm{I}_{2,2} a$$

这说明对于任意的a，$\mathrm{I}_{2,2}$是正定的.

在R_n上，$W(x_1, x_2, \cdots, x_n) \geqslant 0$不是直交多项式基底存在与唯一的必要条件，$\mathrm{I}_{n,d-1}$满秩是基底存在与唯一的充分条件.

习知，若 $P_m(x)$是给定区间上关于非负权与全体 $Q_{m-1}(x)$（次数$\leqslant m-1$ 的多项式)为直交的多项式，则 $P_m(x)$ 的全部零点是实

的，不同的，且在给定区间的内部.对于两个变量的情形，我们将论证类似的结果.

设多项式 $P_m(x, y)$ 在给定的单连通区域上关于非负权函数 $W(x, y)$ 与全体 $Q_{m-1}(x)$ 直交，又设在实数域上可以将它写成

$$P_m(x,y)=P_{m_1}(x,y)\,P_{m_2}(x,y)\cdots P_{m_k}(x,y) \quad (1.9)$$

$$m=m_1+m_2+\cdots m_k \quad m_i\geqslant 1 \quad i=1, 2, \cdots, k$$

此处 P_{m_i} 的系数全是实的且在实数域中是不可约的.

定理 15 式(1.9)中的不可约实因子 $P_{m_i}(x, y)(i=1,2,\cdots,k)$ 是互不相同的（如果两个实因子只差一个常数因子，则认为它们是相同的）；并且，对于每个 i，曲线 $P_{m_i}=0$ 与 R_2 内部区域的交集是非空的.

证 先证明前一论断.若两个或更多的 P_{m_i} 相重合了，例如，$P_{m_1}=P_{m_2}$，取

$$Q_{m-2}=P_{m_3}\cdots P_{m_k}$$
$$Q_{m-1}=P_{m_1}P_{m_3}\cdots P_{m_k}$$

则有

$$\int_{R_2}W(x,y)\,[Q_{m-1}(x, y)]^2dxdy=\int_{R_2}W(x,y)P_mQ_{m-2}dx\,dy$$

$$=0$$

上式中的错误结论说明，式(1.9)中的不可约实因子是互不相同的.

现在证明定理的后一论断．设$P_{m_1}=0$与R_2的内部无交集，考虑多项式

$$Q_{2m-1}=P_{m_1}(P_{m_2}\cdots P_{m_k})^2$$

由 P_m 的直交性，有

$$\int_{R_2}W(x,y)Q_{2m-1}(x,y)dxdy=0 \quad (1.10)$$

但是由于假设$P_{m_1}=0$与R_2的内部交集为空集，所以在R_2上 $P_{m_2}\cdots P_{m_k}$与 P_m 同时变号，并因此 Q_{2m-1} 在 R_2 上保持符号. 然而这是与式(1.10)相矛盾的. 证毕.

§5. 一些特殊的直交多项式

在这一节，我们给出了五种常见区域上的直交多项式：

1° C_n——n维方体

定义：

$$-1\leqslant x_i\leqslant 1 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

$(\pm 1,\ \pm 1,\ \cdots,\ \pm 1)$是$C_n$的顶点；$C_2$是一个正方形.

2° S_n——n维球域

定义：

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1$$

S_2 是单位圆.

3° T_n——n维单纯形域

定义：

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1 \qquad x_i\geqslant 0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

T_2 是三角形；T_3 是四面体；T_n 的顶点是

$$(0,0,\cdots,0),\ (1,0,\cdots,0),\ \cdots,\ (0,0,\cdots,0,1)$$

4° $E_n^{r^2}$——带权函数$\exp(-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2)$的整个 n 维空间

定义：

$$-\infty<x_i<\infty \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

$$W(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=\exp(-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_n^2)$$

5° E_n^r——带权函数 $\exp(-\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2})$ 的整个 n 维空间

定义：

$$-\infty<x_i<\infty \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

$$W(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=\exp(-\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2})$$

以下就上述五种特殊的区域开列一些直交多项式，这些多项式曾由 Appell 和 Kampé de Fériet[79] 研究过.

1. n 维方体域 C_n. 直交多项式的基底是 Legendre 多项式的乘积，亦即

$$P^{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P_{\alpha_1}(x_1)P_{\alpha_2}(x_2)\cdots P_{\alpha_n}(x_n)$$

此处 $P_{\alpha_i}(u)$ 是区间 $[-1,1]$ 上的 α_i 次 Legendre 多项式($P_{\alpha_i}(u)$ 已是标准化的了，亦即它们的首项系数都是1).

2. n 维球域 S_n. 在表1.1给出了次数$\leqslant 4$ 的直交多项式的基底.

表 1.1　S_n上的直交多项式的基底

$$P^{0,0,\cdots,0} = 1$$

$$P^{1,0,\cdots,0} = x_1$$

$$P^{2,0,\cdots,0} = x_1^2 - \frac{1}{n+1}$$

$$P^{1,1,0,\cdots,0} = x_1x_2$$

$$P^{3,0,\cdots,0} = x_1^3 - \frac{3}{n+4}x_1$$

$$P^{2,1,0,\cdots,0} = x_1^2x_2 - \frac{1}{n+4}x_2$$

$$P^{1,1,1,0,\cdots,0} = x_1x_2x_3$$

$$P^{4,0,\cdots,0} = x_1^4 - \frac{6}{n+6}x_1^2 + \frac{3}{(n+4)(n+6)}$$

$$P^{3,1,0,\cdots,0} = x_1^3x_2 - \frac{3}{n+6}x_1x_2$$

$$P^{2,2,0,\cdots,0} = x_1^2x_2^2 - \frac{1}{n+6}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{(n+4)(n+6)}$$

$$P^{2,1,1,0,\cdots,0} = x_1^2x_2x_3 - \frac{1}{n+6}x_2x_3$$

$$P^{1,1,1,1,0,\cdots,0} = x_1x_2x_3x_4$$

若 m_1, m_2, …, m_n 是非负整数，则

$$P_{m_1,\cdots,m_n}=K\frac{\partial m}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_n^{m_n}}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1)^m$$

是$m(=m_1+m_2+\cdots+m_n)$次的多项式，并且在S_n上与全体低次的K项式直交. K是一个常数，通过它的选择可将$P_{m_1,\cdots,m_n}$标准化. 在表1.2，对于$n=2$，$m\leqslant 4$的情形，开列了这些多项式(此处选择K使得P_{m_1,m_2}为最小整系数的多项式，表1.4同).

表 1.2 S_2上的 Appell 和 Kampé de Fériet 直交多项式

$P_{0,0}=1$

$P_{1,0}=x$

$P_{2,0}=3x^2+y^2-1$

$P_{1,1}=xy$

$P_{3,0}=5x^3+3xy^2-3x$

$P_{2,1}=3x^2y+y^3-y$

$P_{4,0}=35x^4+30x^2y^2+3y^4-30x^2-6y^2+3$

$P_{3,1}=5x^3y+3xy^3-3xy$

$P_{2,2}=5x^4+18x^2y^2+5y^4-6x^2-6y^2+1$

3. n维单纯形域T_n. 在表1.3中，我们给出了次数≤3的直交多项式的基底. 若 m_1, m_2, …, m_n 是非负整数，则

$$P_{m_1,\cdots,m_n}=K\frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_n^{m_n}}\left[x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}(1-x_1-\cdots-x_n)^m\right]$$

$$m=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

是 m 次多项式，并且在T_n上与所有的低次多项式直交. K 是任意常数. 在表 1.4，对于 $n=2$，$m\leqslant 4$ 的情形，开列了这些多项式.

表 1.3　T_n上的直交多项式的基底

$$P^{0,0,\cdots,0}=1$$

$$P^{1,0,\cdots,0}=x_1-\frac{1}{n+1}$$

$$P^{2,0,\cdots,0}=x_1{}^2-\frac{4}{n+3}x_1+\frac{2}{(n+2)(n+3)}$$

$$P^{1,1,0,\cdots,0}=x_1x_2-\frac{1}{n+3}(x_1+x_2)+\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

$$P^{3,0,\cdots,0}=x_1{}^3-\frac{9}{n+5}x_1{}^2+\frac{18}{(n+4)(n+5)}x_1-\frac{6}{(n+3)(n+4)(n+5)}$$

$$P^{2,1,0,\cdots,0}=x_1{}^2x_2-\frac{1}{n+5}x_1{}^2-\frac{4}{n+5}x_1x_2+\frac{4}{(n+4)(n+5)}x_1+\frac{2}{(n+4)(n+5)}x_2-\frac{2}{(n+3)(n+4)(n+5)}$$

$$P^{1,1,1,0,\cdots,0}=x_1x_2x_3-\frac{1}{n+5}(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+\frac{1}{(n+4)(n+5)}(x_1+x_2+x_3)-\frac{1}{(n+3)(n+4)(n+5)}$$

表 1.4　T_2上的 Appell 和 Kampé de Fériet 直交多项式

$$P_{0,0}=1$$

$$P_{1,0}=2x+y-1$$

$$P_{2,0}=6x^2+6xy+y^2-6x-2y+1$$

$$P_{1,1}=3x^2+8xy+3y^2-4x-4y+1$$

$$P_{3,0}=20x^3+30x^2y+12xy^2+y^3-30x^2-24xy-3y^2+12x+3y-1$$

$$P_{2,1}=10x^3+36x^2y+27xy^2+4y^3-18x^2-36xy-9y^2+9x+6y-1$$

$$P_{4,0}=70x^4+140x^3y+90x^2y^2+20xy^3+y^4-140x^3-180x^2y-60xy^2-4y^3+90x^2+60xy+6y^2-20x-4y+1$$

表1.4(续)

$$P_{3,1}=35x^4+160x^3y+180x^2y^2+64xy^3+5y^4-80x^3-240x^2y$$
$$-144xy^2-16y^3+60x^2+96xy+18y^2-16x-8y+1$$
$$P_{2,2}=15x^4+120x^3y+216x^2y^2+120xy^3+15y^4-40x^3-216x^2y$$
$$-216xy^2-40y^3+36x^2+108xy+36y^2-12x-12y+1$$

4. $E_n^{r^2}$——带权函数$\exp(-x_1^2-\cdots-x_n^2)$的 n 维全空间. 直交多项式的基底是 Hermite多项式的乘积，亦即

$$P^{m_1,\cdots,m_n}=H_{m_1}(x_1)\cdots H_{m_n}(x_n) \tag{1.11}$$

此处 $H_m(u)$ 是 $(-\infty,\ \infty)$ 上 以$W(u)=\exp(-u^2)$ 为权函数的 Hermite 直交多项式：

$$H_m(u)=K_m\exp(u^2)\frac{d^m}{du^m}\exp(-u^2)$$

多项式 $P^{m_1,\cdots,m_n}$ 也可被写为

$$K\exp(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_n^{m_n}}\exp(-x_1^2-\cdots-x_n^2)$$

$$m=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

5. E_n^r——带权函数 $\exp(-\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2})$ 的 n 维全空间. 表1.5开列了次数≤5的直交多项式的基底. 它们是由 Stroud 和 Secrest 给出的.

表 1.5 E_n^r 上的直交多项式的基底

$$P^{0,0,\cdots,0}=1$$
$$P^{1,0,\cdots,0}=x_1$$
$$P^{2,0,\cdots,0}=x_1^2-(n+1)$$
$$P^{1,1,0,\cdots,0}=x_1x_2$$
$$P^{3,0,\cdots,0}=x_1^3-3(n+3)x_1$$
$$P^{2,1,0,\cdots,0}=x_1^2x_2-(n+3)x_2$$
$$P^{1,1,1,0,\cdots,0}=x_1x_2x_3$$

表1.5(续)

$$P^{4,0,\cdots,0}=x_1^4-6(n+5)x_1^2+\frac{12}{2n+3}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)+\frac{3(n+1)(n+3)(2n+7)}{2n+3}$$

$$P^{3,1,0,\cdots,0}=x_1^3x_2-3(n+5)x_1x_2$$

$$P^{2,2,0,\cdots,0}=x_1^2x_2^2-(n+5)\ (x_1^2+x_2^2)+\frac{4}{2n+3}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)+\frac{(n+1)(n+3)(2n+7)}{2n+3}$$

$$P^{2,1,1,0,\cdots,0}=x_1^2x_2x_3-(n+5)x_2x_3$$

$$P^{1,1,1,1,0\cdots,0}=x_1x_2x_3x_4$$

$$P^{5,0,\cdots,0}=x_1^5-10(n+7)x_1^3+\frac{60}{2n+7}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)x_1+\frac{15(n+3)(n+5)(2n+11)}{2n+7}x_1$$

$$P^{4,1,0,\cdots,0}=x_1^4x_2-6(n+7)x_1^2x_2+\frac{12}{2n+7}\ (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)x_2+\frac{3(n+3)(n+5)(2n+11)}{2n+7}x_2$$

$$P^{3,2,0,\cdots,0}=x_1^3x_2^2-(n+7)x_1^3-3(n+7)x_1x_2^2+\frac{12}{2n+7}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)x_1+\frac{3(n+3)(n+5)(2n+11)}{2n+7}x_1$$

$$P^{3,1,1,0,\cdots,0}=x_1^3x_2x_3-3(n+7)x_1x_2x_3$$

$$P^{2,2,1,0,\cdots,0}=x_1^2x_2^2x_3-(n+7)(x_1^2+x_2^2)x_3+\frac{4}{2n+7}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)x_3+\frac{(n+3)(n+5)(2n+11)}{2n+7}x_3$$

$$P^{2,1,1,1,\cdots,0}=x_1^2x_2x_3x_4-(n+7)x_2x_3x_4$$

$$P^{1,1,1,1,1,0,\cdots,0}=x_1x_2x_3x_4x_5$$

§6. Radon的七点五次求积公式

在以下三节中，介绍平面区域上的Radon七点五次求积公式.

令R_2表平面上的任意有界区域，又设权函数$W(x, y)=1$.我们将证明，能够构造R_2上的七点五次求积公式（其实，对任意的权函数$W(x, y)\geqslant 0$亦是如此).为此，需要寻找R_2上的三个线性无关的三次直交多项式，它们有七个不同的公共零点．如果这样的多项式找到了，进一步容易证明，以这七个点为求积结点的求积公式有五次代数精度．至今，人们还没有找到不能构造七点五次求积公式的平面有界区域R_2．在这一节，我们将描述七点五次公式的特征(见定理16).

令$P_k(x, y)$和$P_{k,i}(x, y)$表示真正k次的二元多项式，而$Q_k(x, y)$和$Q_{k,i}(x, y)$表示次数$\leqslant k$的二元多项式．又令

$$\begin{cases} P^{3,0}(x,y)\equiv x^3+Q_2^{3,0}(x,y) \\ P^{1,2}(x,y)\equiv xy^2+Q_2^{1,2}(x,y) \\ P^{2,1}(x,y)\equiv x^2y+Q_2^{2,1}(x,y) \\ P^{0,3}(x,y)\equiv y^3+Q_2^{0,3}(x,y) \end{cases} \tag{1.12}$$

表示R_2上的三次直交多项式的四个基底（其中$Q_2^{3,0}$，$Q_2^{2,1}$，$Q_2^{1,2}$和$Q_2^{0,3}$是次数$\leqslant$2的二元多项式).我们定义三个常数：

$$\begin{aligned} A&=\int_{R_2}[P^{3,0}P^{1,2}-(P^{2,1})^2]dxdy \\ B&=\int_{R_2}[P^{3,0}P^{0,3}-P^{2,1}P^{1,2}]dxdy \\ C&=\int_{R_2}[P^{2,1}P^{0,3}-(P^{1,2})^2]dxdy \end{aligned} \tag{1.13}$$

同时，假定R_2满足条件

$$A^2+B^2+C^2>0$$

亦即，R_2使A，B，C不全为零.至今还不知道是否有二维区域使得$A=B=C=0$.

假定需要构造一个平面区域R_2上的五次求积公式，自然要问，至少需要多少个求积结点？Мысовских指出，在$A^2+B^2+C^2\neq 0$的约束下，为了得到一个五次求积公式，结点个数七是不能再减少的了. 我们不可能用六个结点构造出一个五次求积公式. 事实上，假若不然，设求积公式

$$\int_{R_2}(f(x,y)\,dxdy\cong\sum_{j=1}^{6}C_j f(x_j,y_j) \qquad (1.14)$$

有五次代数精度.显然，它的结点$p_j=(x_j,\ y_j)$，$j=1,\ 2,\ \cdots,6$，不能同时在一条二次曲线上.

通过式(1.14)中任意五点(假定不包含点p_k)作一条二次曲线$R_k(x,\ y)=0$，则有$R_k(p_k)\neq 0$.依假设，对于四次式R_k^2，求积公式(1.14)应是精确的，亦即

$$\int_{R_2}R_k^2(x,y)\,dxdy=C_kR_k^2(p_k)$$

从而，应有$C_k>0$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$.

令$K(x,\ y)$表R_2上的任意三次直交多项式，则对于五次式KR_k求积公式(1.14)应是精确的，亦即

$$\int_{R_2}KR_k\,dxdy=C_kK(p_k)R_k(p_k)$$

但依直交性，上式左端的积分值为零. 又$C_k>0$，$R_k(p_k)\neq 0$，故$K(p_k)=0$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$.这说明R_2上的任意三次直交多项式在求积公式(1.14)的求积结点处的值为零，特别由式(1.12)给出的三次直交多项式的四个基底亦应如此.

现在证明，式(1.13)中A的值为零. 事实上，

$$A=\int_{R_2}[P^{3,0}xy^2-P^{2,1}x^2y]\,dx\,dy$$

$$=\int_{R_2}[x^3+Q_2^{3,0})xy^2-(x^2y+Q_2^{2,1})x^2y]\,dxdy$$

$$=\int_{R_2}[Q_2^{3,0}xy^2-Q_2^{2,1}x^2y]\,dxdy$$

但是 $Q_2^{3,0}$ 与 $Q_2^{2,1}$ 为次数≤2的二元多项式，故依假设知最后的积分的精确值为

$$A=\sum_{i=1}^{6}C_i[Q_2^{3,0}(x_i,y_i)x_iy_i^2-Q_2^{2,1}(x_i,y_i)x_i^2y_i] \tag{1.15}$$

又因为由式(1.12)确定的四个直交多项式在求积结点处的值为零，所以

$$Q_2^{3,0}(x_i,y_i)=-x_i^3 \qquad Q_2^{2,1}(x_i,y_i)=-x_i^2y_i$$

从而，依式(1.15)，$A=0$. 同理可得$B=C=0$；而这与 $A^2+B^2+C^2\neq 0$矛盾. 上述论证说明不可能用六个点构造出R_2上的五次求积公式，亦即为了构造一个 R_2 上的五次求积公式至少需要七个求积结点.

定理 16 若求积公式

$$\int_{R_2}f(x,y)\,dx\,dy\cong\sum_{i=1}^{7}A_if(x_i,y_i) \tag{1.16}$$

有五次代数精度，则有三个三次多项式

$$P_{3,1}(x,y) \quad P_{3,2}(x,y) \quad P_{3,3}(x,y) \tag{1.17}$$

满足以下条件

(i) 多项式(1.17)是线性无关的，并且它们中的每一个均与次数≤2的多项式 $Q_2(x,y)$ 直交

(ii) (1.16)中的七个求积结点是多项式 $P_{3,i}(x,y)$ $(i=1,2,3)$的公共零点

(iii) 以求积公式(1.16)中的七个结点为零点的任意多项式 $Q(x,y)$ 是$P_{3,1}$，$P_{3,2}$ 与 $P_{3,3}$ 的线性组合

(iv) 有三个一次多项式(其中至少有两个不恒为零)：

$$Q_{1,i}\equiv a_i x+b_i y+c_i \qquad i=1,\ 2,\ 3$$

使得

$$Q_{1,1}P_{3,1}+Q_{1,2}P_{3,2}+Q_{1,3}P_{3,3}\equiv 0 \tag{1.18}$$

证 先证明(i)和(ii).显然七个点$\mathrm{p}_i=(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,7)$不能在同一条二次曲线$Q_2(x,y)=0$上，因为否则将有

$$\int_{R_2}[Q_2(x,y)]^2dxdy=0$$

这说明以$(x_1^\alpha y_1^\beta,\ x_2^\alpha y_2^\beta,\ \cdots,\ x_7^\alpha y_7^\beta)$ $(0\leqslant\alpha+\beta\leqslant 2)$ 为行向量的矩阵的秩数是6.依下面的定理27(见§7)，满足条件(i)和(ii)的多项式$P_{3,i}(x,y)(i=1,2,3)$是存在的.

现在证明(iii)因为七个求积结点不能在同一条二次曲线上，自然其中任意五个点不在一条直线上. 现在证明，在七个求积结点中,一定有六个点不在一条二次曲线上.假若不然，则$\mathrm{p}_i=(x_i,y_i)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$中任意六个点均在一条二次曲线上.特别，$\mathrm{p}_1$; p_2, $\cdots$, p_6; p_2, p_3, $\cdots\mathrm{p}_7$将在两条不同的二次曲线$Q_{2,1}=0$与$Q_{2,2}=0$上.由于它们有五个公共点,故依定理 2，$Q_{2,1}=0$与$Q_{2,2}=0$有一公共支；又由于这部分含有五个点，所以它不可是一条直线，从而$Q_{2,1}$与$Q_{2,2}$必然重合，亦即求积公式(1.16)中的七个结点在一条二次曲线上.矛盾.

不妨假定p_1, p_2, $\cdots$, p_6不在一条二次曲线上,过p_7引一不过点p_1, p_2, $\cdots$, p_6的直线，并在该直线上取三个不同于p_7的点 p_8, p_9, p_{10}. 则如我们在定理 4 中曾证明的情形一样，p_1, p_2, $\cdots$, p_{10}不同在任一条三次曲线 $Q_3=0$上，亦即线性方程组

$$\begin{gathered}a_{00}+a_{10}x_i+a_{01}y_i+a_{20}x_i^2+a_{11}x_iy_i+a_{02}y_i^2+a_{30}x_i^3\\ +a_{21}x_i^2y_i+a_{12}x_iy_i^2+a_{03}y_i^3=\gamma_i\\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 10\end{gathered}$$

的系数矩阵是满秩的. 因此，我们能够找到三个三次多项式

$P^*_{3,1}(x,y)$，$P^*_{3,2}(x,y)$，$P^*_{3,3}(x,y)$，它们满足

$$P^*_{3,1}(x_i,y_i)\begin{cases}0 & i\neq 8\\ 1 & i=8\end{cases}$$

$$P^*_{3,2}(x_i,y_i)\begin{cases}0 & i\neq 9\\ 1 & i=9\end{cases}$$

$$P^*_{3,3}(x_i,y_i)\begin{cases}0 & i\neq 10\\ 1 & i=10\end{cases}$$

由于求积公式(1.16)是五次的求积公式，并且p_1，p_2，…，p_7是$P^*_{3,1}$，$P^*_{3,2}$，$P^*_{3,3}$的公共零点，所以$P^*_{3,i}(i=1, 2, 3)$中的任一个均与次数≤2的多项式$Q_2(x, y)$直交．显然，$P^*_{3,1}$, $P^*_{3,2}$, $P^*_{3,3}$是线性无关的，并且任意的以$p_i=(x_i, y_i)(i=1, 2, \cdots, 7)$为零点的多项式$Q_3(x, y)$必是$P^*_{3,1}$，$P^*_{3,2}$，$P^*_{3,3}$的线性组合．因此只能有三个以$p_i(i=1,2,\cdots,7)$为零点的三次的线性无关的多项式．由(i)和(ii)知$P_{3,i}(x, y)$ $(i=1, 2, 3)$是这样的多项式，故以$p_i(i=1, 2, \cdots, 7)$为零点的任意三次多项式一定是$P_{3,i}(i=1, 2, 3)$的线性组合．

最后证明(iv)．如我们在定理4的证明中的情形一样，可以找到点p_{11}，p_{12}，…，p_{15}使得p_1，p_2，…，p_{15}不在任一条四次曲线上．式(1.18)的左端是一个四次多项式Q_4，而p_1，p_2，…p_7是它的零点．因为p_1，p_2，…p_{15}不在一条四次曲线上，所以若能找到a_i，b_i，$c_i(i=1, 2, 3)$使得

$$Q_4(x_j,y_j)=0 \qquad j=8, 9, \cdots, 15$$

则Q_4将是恒等于零的．因此，问题归结为求解九个未知数八个方程的齐线性方程组．习知，这样的方程组总有非平凡解，从而$Q_{1,i}(i=1, 2, 3)$是存在的．又因为若它们之中有两个恒等于零，将导至第三个亦恒等于零，所以至少有两个不恒为零．证毕．

§7. 七点五次求积公式的构造方法

本节，我们将致力于建立定理16的逆定理．这部分由七个定理组成．它们的结论说明，对于一般的二维区域，均可构造七点五次求积公式．

首先介绍如何构造三个线性无关的直交多项式$P_{3,i}$ $(i=1,2,3)$，使得它们满足

$$Q_{1,1}P_{3,1}+Q_{1,2}P_{3,2}+Q_{1,3}P_{3,1}\equiv 0 \qquad (1.19)$$

其次将指出$P_{3,i}$有七个公共零点，且如果这些零点是不同的，则它们可以用来作五次求积公式

$$\int_{R_2} f(x,y)dx\,dy \cong \sum_{i=1}^{7} B_i f(x_i,y_i) \qquad (1.20)$$

的求积结点

定理 17 如果式(1.13)中的 A，B，C不全为零，则可以找到三个线性无关的直交多项式 $P_{3,i}$ $(i=1, 2, 3)$，它们满足式(1.19)，其中$Q_{1,i}(i=1, 2, 3)$为一次函数，并且至少有两个不恒等于零．

证 我们先证明可以找到三次直交多项式$P_{3,i}(i=1,2,3)$，它们满足条件

$$xP_{3,1}+yP_{3,2}=P_{3,3} \qquad (1.21)$$

事实上，任意的三次直交多项式$P_{3,1}$与$P_{3,2}$均能以三次直交多项式基底线性表示，亦即

$$P_{3,1}=\alpha_{30}P^{3,0}+\alpha_{21}P^{2,1}+\alpha_{12}P^{1,2}+\alpha_{03}P^{0,3}$$

$$P_{3,2}=\beta_{30}P^{3,0}+\beta_{21}P^{2,1}+\beta_{12}P^{1,2}+\beta_{03}P^{0,3}$$

依式(1.21)，要求$xP_{3,1}+yP_{3,2}$是三次多项式，所以四次项必然消失，因此

$$\alpha_{30}=\beta_{03}=0,\ \alpha_{21}=-\beta_{30},\ \alpha_{12}=-\beta_{21},\ \alpha_{03}=-\beta_{12}$$

从而 $P_{3,1}$ 和 $P_{3,2}$ 变成

$$
\begin{aligned}
P_{3,1} &= \alpha P^{2,1} + \beta P^{1,2} + \gamma P^{0,3} \\
P_{3,2} &= -\alpha P^{3,0} - \beta P^{2,1} - \gamma P^{1,2}
\end{aligned}
\qquad (1.22)
$$

以下我们确定α,β和γ以使$xP_{3,1}+yP_{3,2}$为一三次直交多项式.

因为$P_{3,1}$与$P_{3,2}$为三次直交多项式，所以$xP_{3,1}+yP_{3,2}$与全体Q_1直交，故我们只需选择α，β，γ使得

$$
\begin{aligned}
xP_{3,1}+yP_{3,2} = \alpha(xP^{2,1}-yP^{3,0}) + \beta(xP^{1,2}-yP^{2,1}) \\
+\gamma(xP^{0,3}-yP^{1,2})
\end{aligned}
$$

与x^2，xy，y^2直交就可以了. 这导至方程组

$$
\begin{cases}
A\beta + B\gamma = 0 \\
-A\alpha + C\gamma = 0 \\
-B\alpha - C\beta = 0
\end{cases}
\qquad (1.23)
$$

若A，B，C不全为零，则方程组(1.23)的系数矩阵的秩数为2，因此除了差一常数因子外，方程组(1.23)有唯一的不全为零的解α，β，γ，并因此$P_{3,1}$与$P_{3,2}$线性无关.

现在考虑两种情形：

(*a*) $P_{3,3}=xP_{3,1}+yP_{3,2}$与$P_{3,1}$和$P_{3,2}$是线性无关的；

(*b*) $P_{3,3}$是$P_{3,1}$与$P_{3,2}$的线性组合：

$$
P_{3,3}=\lambda_1 P_{3,1}+\lambda_2 P_{3,2} \qquad (1.24)
$$

在情形(*a*)，我们找到了三个线性无关的多项式，它们满足式(1.21)，是式(1.19)型的恒等式. 在情形(*b*)，依式(1.21)和(1.24)，得到

$$
(x-\lambda_1)P_{3,1}+(y-\lambda_2)P_{3,2}=0 \qquad (1.25)
$$

通过变换$x-\lambda_1=x'$与$y-\lambda_2=y'$，式(1.25)变成

$$
xP_{3,1}+yP_{3,2}=0 \qquad (1.26)
$$

(注意，为简单计，我们仍使用原来的符号表示自变量与直交多项式). 因此，在情形(*b*)，我们只找到了两个线性无关的直交多项式. 若将$P_{3,3}$取为任意的与$P_{3,1}$，$P_{3,2}$线性无关的三次直交多项式，并取$Q_{1,3}\equiv 0$，则仍可将式(1.26)看成是式(1.19)型的恒等

式.

现在，我们转向研究上述的$P_{3,3}$. 为此，有关$P_{3,1}$与$P_{3,2}$的一些性质是我们所需要的. 在情形(b)，式(1.26)成立，因此

$$P_{3,1}=yP_2 \qquad P_{3,2}=-xP_2 \tag{1.27}$$

其中P_2是二次多项式. 我们指出，P_2与所有的在原点取零值的三次多项式Q_3是直交的. 事实上，假定$Q_3=xQ_{2,1}+yQ_{2,2}$，依式(1.27)及$P_{3,1}$与$P_{3,2}$的直交性

$$\int_{R_2} P_2Q_3dx\,dy=\int_{R_2} P_2(xQ_{2,1}+yQ_{2,2})dxdy$$

$$=\int_{R_2} (-P_{3,2}Q_{2,1}+P_{3,1}Q_{2,2})dxdy=0$$

顺便指出，由上述结论还可以推知$P_2(0,\ 0)\neq 0$. 因为若$P_2(0,\ 0)=0$，则P_2将是与自己直交，并因此$P_2\equiv 0$；但是$P_2\equiv 0$将导至错误的结论：$P_{3,1}\equiv 0$，$P_{3,2}\equiv 0$.

其次，我们证明，在情形(b)所有的三次直交多项式在原点的值为零. 设$P_3(x,\ y)$是任意的三次直交多项式，则$P_3(x,\ y)-P(0,\ 0)$为三次多项式，并且它在原点的值为零. 由此

$$\int_{R_2} [P_3(x,y)-P_3(0,0)]P_2dxdy=0$$

但是P_3是一个直交多项式，所以

$$P_3(0,0)\int_{R_2} P_2dxdy=0$$

又因为

$$\int_{R_2} xP_2dxdy=0, \qquad \int_{R_2} yP_2dxdy=0,$$

$$\int_{R_2} x^2P_2dxdy=0, \qquad \int_{R_2} xyP_2dxdy=0,$$

$$\int_{R_2} y^2 P_2 dxdy = 0$$

所以若

$$\int_{R_2} P_2 dxdy = 0$$

将推出 P_2 与自已直交，而这在前面已说明是不可能的，因此一定是 $P_3(0, 0)=0$

令 P_3^* 是任意的三次直交多项式，它与 $P_{3,1}$ 和 $P_{3,2}$ 是线性无关的. 依式(1.27)

$$P_{3,1}=y(a_{00}+a_{10}x+\cdots) \qquad P_{3,2}=-x(a_{00}+a_{10}x+\cdots)$$

其中 $a_{00}=P_2(0, 0)\neq 0$. 我们可以从 P_3^* 中减去 $P_{3,1}$ 与 $P_{3,2}$ 的线性组合，使得

$$P_{3,3}\equiv P_3^* - (a_1P_{3,1}+a_2P_{3,2})$$

不含x，y的一次项. 显然，$P_{3,1}$，$P_{3,2}$，$P_{3,3}$与$P_{3,1}$，$P_{3,2}$，P_3^* 有相同的公共零点.

综上所述，$P_{3,3}$ 可以取成不含x，y一次项的任意的三次直交多项式. 这样的多项式不可能是 $P_{3,1}$ 和 $P_{3,2}$ 的线性组合. 我们记

$$P_{3,3}=a_{30}P^{3,0}+a_{21}P^{2,1}+a_{12}P^{1,2}+a_{03}P^{0,3}$$

由于一次项x和y的系数为零，我们为a_{ij}加上两个限制. 因此，存在着直交多项式$P_{3,3}$的两个参变量族，它是与$P_{3,1}$和$P_{3,2}$线性无关的. 因此，在情形(b) $P_{3,3}$不是唯一的. 证毕.

在考虑 $P_{3,1}$，$P_{3,2}$ 和 $P_{3,3}$ 的公共零点之前，我们先建立两个辅助结果.

定理 18 若多项式 $P_{3,1}$，$P_{3,2}$和$P_{3,3}$ 满足关系

$$Q_{1,1}P_{3,1}+Q_{1,2}P_{3,2}+Q_{1,3}P_{3,3}\equiv 0 \qquad (1.28)$$

其中 $Q_{1,i}=a_ix+b_iy+c_i(i=1, 2, 3)$，则(除乘一常数外)这些关系在情形 (a) 与式(1.21)相重合，而在情形 (b) 与式 (1.26) 相

重合

证 我们给出对于情形(a)的证明，关于情形(b)的证明是类似的. 方程(1.28)可写成

$$x(a_1P_{3,1}+a_2P_{3,2}+a_3P_{3,3})+y(b_1P_{3,1}+b_2P_{3,2}+b_3P_{3,3})$$
$$+(c_1P_{3,1}+c_2P_{3,2}+c_3P_{3,3})=0$$

但是满足式(1.21)的$P_{3,i}$是唯一的，因此

$$a_1P_{3,1}+a_2P_{3,2}+a_3P_{3,3}=\alpha P_{3,1}$$
$$b_1P_{3,1}+b_2P_{3,2}+b_3P_{3,3}=\alpha P_{3,2}$$
$$c_1P_{3,1}+c_2P_{3,2}+c_3P_{3,3}=-\alpha P_{3,3}$$

其中$\alpha\neq 0$. 因为$P_{3,1}$，$P_{3,2}$，$P_{3,3}$是线性无关的，所以一定有

$$a_1=\alpha \qquad a_2=0 \qquad a_3=0$$
$$b_1=0 \qquad b_2=\alpha \qquad b_3=0$$
$$c_1=0 \qquad c_2=0 \qquad c_3=-\alpha$$

证毕.

定理 19 多项式 $P_{3,i}(i=1,\ 2,\ 3)$无公因子.

证 首先指出，$P_{3,i}(i=1,\ 2,\ 3)$无二次的公因子P_2. 假定$P_{3,i}=P_2P_{1,i}(i=1,\ 2,\ 3)$，由于$P_{3,i}$是线性无关的，故有常数$c_1$，$c_2$和$c_3$使得

$$c_1P_{1,1}+c_2P_{1,2}+c_3P_{1,3}=1$$

乘上式以 P_2，得到

$$c_1P_{3,1}+c_2P_{3,2}+c_3P_{3,3}=P_2$$

而这意味着

$$\int_{R_2}[P_2(x,y)]^2dxdy=0$$

故矛盾.

现在，我们证明$P_{3,i}$无一次公因子. 首先考虑情形(a). 假定$P_{3,i}=P_1P_{2,i}(i=1,\ 2,\ 3)$，其中$P_{2,i}$是线性无关的. 依式(1.21)有

$$xP_{2,1}+yP_{2,2}=P_{2,3}$$

故$xP_{2,1}+yP_{2,2}$中的三次项消失了. 因此

$$\begin{aligned}
&P_{2,1}=y(ax+by)+P_{1,1}^{*}\\
&P_{2,2}=-x(ax+by)+P_{1,2}^{*}\\
&P_{2,3}=xP_{1,1}^{*}+yP_{1,2}^{*}
\end{aligned}\tag{1.29}$$

由上式得

$$P_{1,2}^{*}P_{2,1}-P_{1,1}^{*}P_{2,2}=(ax+by)P_{2,3}$$

乘上述方程以 P_1, 得到

$$P_{1,2}^{*}P_{3,1}-P_{1,1}^{*}P_{3,2}=(ax+by)P_{3,3}$$

依式(1.21)的唯一性, 应有 $P_{1,2}^{*}=ax$, $P_{1,1}^{*}=-ay$; 而这意味着 $P_{2,3}\equiv 0$ 及 $P_{3,3}\equiv 0$. 然而这是不可能的.

现在考虑情形(b). 假定$P_{3,i}=P_1P_{2,i}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$则 $P_{3,1}=P_1P_{1,1}y$, $P_{3,2}=-P_1P_{1,1}x$, $P_{3,3}=P_1P_2^{*}$. 我们指出, $P_2(0,\ 0)\neq 0$(此处$P_2=P_1P_{1,1}$), 因此$P_{1,1}(0,\ 0)\neq 0$. 又因为 $P_{2,3}(0,\ 0)=0$, 所以一定有$P_2^{*}(0,\ 0)=0$. 故P_2^{*}可写成 $P_2^{*}=xP_{1,1}^{*}+yP_{1,2}^{*}$, 因此

$$\begin{aligned}
P_{1,2}^{*}P_{3,1}-P_{1,1}^{*}P_{3,2}&=P_{1,2}^{*}P_1P_{1,1}y+P_{1,1}^{*}P_1P_{1,1}x\\
&=P_1P_{1,1}(xP_{1,1}^{*}+yP_{1,2}^{*})\\
&=P_{1,1}P_{3,3}
\end{aligned}$$

依式(1.26)的唯一性, $P_{1,1}\equiv 0$, 故矛盾. 证毕.

定理 20 多项式$P_{3,i}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ 有七个公共零点.

证 在情形(b), 公共零点是原点及曲线 $P_2=0$和$P_{3,3}=0$ 的六个交点, 此处 P_2是式(1.27)中的多项式.

在情形(a), 依式(1.21), $P_{3,1}$和$P_{3,2}$的零点显然也是$P_{3,3}$的零点. 依定理19及 Bezout 定理, 曲线

$$P_{3,1}=y(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)+a_{20}x^2+a_{11}xy+\cdots+a_{00}=0$$

$$P_{3,2}=-x(\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2)+b_{20}x^2+b_{11}xy+\cdots+b_{00}=0$$

有九个交点. 但是, 容易看出, 在射影坐标系内, 九个点中有两

个点是无穷远点. 证毕.

令$\mathfrak{p}_i=(x_i, y_i)(i=1, 2, \cdots, 7)$表$P_{3,1}$, $P_{3,2}$和$P_{3,3}$的七个公共零点. 如果这七个点是不同的, 我们将证明, 它们可以用来作为R_2上的五次求积公式的求积结点. 若$\mathfrak{p}_i$都是实的, 则求积公式中的七个求积系数也将都是实数. 如果在$P_{3,i}(i=1, 2, 3)$的七个公共零点中有复的, 但是只要它们互不相同, 并且允许求积公式的结点与系数是复的, 则仍然可以得到七点五次求积公式. 为证明这个结论, 先证明以下两个定理.

定理 21 $P_{3,i}$的公共零点$\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{p}_7$不能在同一条二次曲线上.

证 假定$\mathfrak{p}_i(i=1, 2, \cdots, 7)$在二次曲线$\overline{P_2}=0$上. 先假定$\overline{P_2}$是不可约的. 依定理 2, 在情形(*a*) $\overline{P_2}$是$P_{3,i}$的公共支, 依定理19这是不可能的. 在情形(*b*), 曲线$P_2=0$与$\overline{P_2}=0$有六个公共零点. 再依定理 2, 它们应重合. 但$P_2(0, 0)\neq 0$, 故$\overline{P_2}(0, 0)\neq 0$. 然而这也是不可能的.

假定$\overline{P_2}=P_{1,1}P_{1,2}$, 则$P_{1,1}=0$与$P_{1,2}=0$两条直线中至少有一个含有$\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{p}_7$中的四个点. 依定理 2 这条直线是$P_{3,1}$, $P_{3,2}$与$P_{3,3}$的公共支. 但是, 依定理12这是不可能的. 证毕.

定理 22 若$Q_5(x,y)$是任意的次数$\leqslant 5$的多项式, 并且$\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\cdots\mathfrak{p}_7$是它的零点, 则有多项式$Q_{2,i}(i=1, 2, 3)$满足

$$Q_5=Q_{2,1}P_{3,1}+Q_{2,2}P_{3,2}+Q_{2,3}P_{3,3} \qquad (1.30)$$

证 因为$\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{p}_7$不在一条二次曲线上, 因此可以找到十四个点$\mathfrak{p}_8$, $\mathfrak{p}_9$, $\cdots$, $\mathfrak{p}_{21}$, 使得$\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{p}_{21}$不在一条五次曲线上. 式(1.30)两边都是五次多项式, 它们在点$\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{p}_7$相合(其值为零). 为使式(1.30)中的二个五次多项式恒等, 只需它们在点$\mathfrak{p}_8$, $\mathfrak{p}_9$, $\cdots$, $\mathfrak{p}_{21}$的值相合就可以了, 这导至一个十八个未知数(它们是$Q_{2,i}$的系数), 十四个方程的线代数方程组.

为了说明上述方程组的可解性，我们考虑相应的齐方程组，亦即寻找$Q_{2,1}$，$Q_{2,2}$和$Q_{2,3}$使得

$$Q_{2,1}P_{3,1}+Q_{2,2}P_{3,2}+Q_{2,3}P_{3,3}=0 \tag{1.31}$$

在情形(a)，方程(1.31)成为

$$(Q_{2,1}+xQ_{2,3})P_{3,1}+(Q_{2,2}+yQ_{2,3})P_{3,2}=0$$

因为$P_{3,1}$与$P_{3,2}$无公共支，所以一定有

$$Q_{2,1}+xQ_{2,3}=-\mu P_{3,2}=\mu x(ax^2+\beta xy+\gamma y^2)+\mu(\alpha Q_2^{3,0}+\beta Q_2^{2,1}+\gamma Q_2^{1,2}) \tag{1.32}$$

$$Q_{2,2}+yQ_{2,3}=\mu P_{3,1}=\mu y(ax^2+\beta xy+\gamma y^2)+\mu(\alpha Q_2^{2,1}+\beta Q_2^{1,2}+\gamma Q_2^{0,3}) \tag{1.33}$$

此处μ是非零常数. 比较式(1.32)，(1.33)两端三次项系数，得到

$$Q_{2,3}=\mu(ax^2+\beta xy+\gamma y^2)+ax+by+c$$

进一步，由式(1.32)，(1.33)可以解出$Q_{2,1}$与$Q_{2,2}$. 从而，求得了式(1.31)的一般解，它依赖于四个常数a, b, c, μ. 这意味着齐方程组矩阵的秩数是十四，从而非奇方程组总是可解的. 因此在情形(a)满足式(1.30)的$Q_{2,1}$，$Q_{2,2}$，$Q_{2,3}$是存在的.

在情形(b)，依式(1.27)，方程(1.31)变成

$$(yQ_{2,1}-xQ_{2,2})P_2+Q_{2,3}P_{3,3}=0$$

由于P_2与$P_{3,3}$无公共支，故

$$Q_{2,3}=\mu P_2 \qquad yQ_{2,1}-xQ_{2,2}+\mu P_{3,3}=0 \tag{1.34}$$

此处μ为不等于零的常数. 由于$P_{3,3}$在原点的值为零，所以$P_{3,3}=yQ_{2,4}-xQ_{2,5}$. 再依式(1.34)，得到

$$y(Q_{2,1}+\mu Q_{2,4})-x(Q_{2,2}+\mu Q_{2,5})=0$$

从而

$$Q_{2,1}+\mu Q_{2,4}=x(ax+by+c)$$

$$Q_{2,2}+\mu Q_{2,5}=y(ax+by+c)$$

并且式(1.31)的一般解是

$$Q_{2,1}=-\mu Q_{2,4}+x(ax+by+c)$$

$$Q_{2,2}=-\mu Q_{2,5}+y(ax+by+c)$$
$$Q_{2,3}=\mu P_2$$

它们依赖四个任意常数a，b，c，μ. 综上所述，可以断定，在情形(b)，式(1.31)(从而式(1.30))是可解的. 证毕.

现在，我们能够证明下面的

定理 23 若 $P_{3,i}(i=1,2,3)$的七个公共零点是不同的，则这些零点可以作为五次求积公式

$$\int_{R_2} f(x,y)\,dx\,dy\cong\sum_{i=1}^{7}B_i f(x_i,y_i)$$

的求积结点

证 我们能够找到点p_8，p_9，…，p_{21}，使得p_1，p_2，…，p_{21}不在一条五次曲线上. 因此，通过解二十一阶线性方程组，我们能够找到 B_1，B_2，…，B_{21} 使得

$$\int_{R_2} Q_5(x,y)\,dxdy=\sum_{i=0}^{21}B_iQ_5(x_i,y_i) \qquad (1.35)$$

我们将证明$B_8=B_9=\cdots=B_{21}=0$.

首先考虑B_8. 因为p_1，p_2，…，p_{21}不在一条五次曲线上，我们可以找到满足下列条件的Q_5：

$$Q_5(x_i,y_i)=\begin{cases}0 & i\neq 8\\ 1 & i=8\end{cases} \qquad (1.36)$$

由于Q_5在点p_1，p_2，…，p_7处的值为零，依定理22有$Q_{2,1}$，$Q_{2,2}$，$Q_{2,3}$使得

$$Q_5=Q_{2,1}P_{3,1}+Q_{2,2}P_{3,2}+Q_{2,3}P_{3,3}$$

从而

$$\int_{R_2} Q_5(x,y)\,dx\,dy=\int_{R_2}(Q_{2,1}P_{3,1}+Q_{2,2}P_{3,2}+Q_{2,3}P_{3,3})\,dxdy$$
$$=0$$

由于式(1.35)对于 Q_5 是精确的，依式(1.36)得到

$$\int_{R_2} Q_5(x,y)dx\,dy = B_8 = 0$$

同理$B_9 = B_{10} = \cdots = B_{21} = 0$. 证毕.

§8. 关于区域的讨论

显然，在利用二元直交多项式理论构造七点五次求积公式

$$\int_{R_2} f(x,y)dx\,dy \cong \sum_{i=1}^{7} B_i f(x_i, y_i)$$

的过程中，区域R_2所应满足的条件$A^2 + B^2 + C^2 > 0$（此处A, B, C由式(1.13)决定)起着决定性作用. 在Radon的工作中，曾指出，当区域R_2为轴对称时，满足上述条件. 下面证明，当R_2为中心对称区域时，亦满足上述条件.

定理 24 设R_2为中心对称区域，则$A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

证 反证法. 设$A = B = C = 0$. 不难看出，此时R_2(无论是否中心对称区域)上的基本直交多项式与x, y的线性组合

$$P^{3,0}y - P^{2,1}x \qquad P^{0,3}x - P^{1,2}y \tag{1.37}$$

与全体二次多项式直交.

当R_2为中心对称区域时，基本的直交多项式为

$$P^{3,0} = x^3 + \frac{1}{\Delta}(\mu_{11}\mu_{31} - \mu_{02}\mu_{40})x + \frac{1}{\Delta}(\mu_{11}\mu_{40} - \mu_{20}\mu_{31})y$$

$$P^{2,1} = x^2y + \frac{1}{\Delta}(\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{02}\mu_{31})x + \frac{1}{\Delta}(\mu_{11}\mu_{31} - \mu_{20}\mu_{22})y$$

$$P^{1,2} = xy^2 + \frac{1}{\Delta}(\mu_{11}\mu_{13} - \mu_{02}\mu_{22})x + \frac{1}{\Delta}(\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{20}\mu_{13})y$$

$$P^{0,3} = y^3 + \frac{1}{\Delta}(\mu_{11}\mu_{04} - \mu_{02}\mu_{13})x + \frac{1}{\Delta}(\mu_{11}\mu_{13} - \mu_{20}\mu_{04})y$$

此处

$$\mu^{\alpha\beta}=\int_{R_2} x^\alpha y^\beta dxdy \qquad \alpha,\beta=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

显然当 $\alpha+\beta$ 为奇数时，$\mu_{\alpha\beta}=0$；$\Delta=\mu_{20}\mu_{02}-\mu_{11}^2$.

上述公式也可简记为

$$P^{3-i,i}=x^{3-i}y^i+a^{(i)}x+b^{(i)}y \qquad i=0,1,2,3$$

由此，可以得到式(1.37)的表达式为

$$P^{3,0}y-P^{2,1}x=-a^{(1)}x^2+(a^{(0)}-b^{(1)})xy+b^{(0)}y^2$$

$$P^{0,3}x-P^{1,2}y=a^{(3)}x^2+(b^{(3)}-a^{(2)})xy-b^{(2)}y^2$$

可见，它们都是二次多项式. 由于要求它们与全体二次多项式直交，所以它们的系数一定全部为零. 特别，xy 项的系数应为零，亦即 $a^{(0)}-b^{(1)}=0$，$b^{(3)}-a^{(2)}=0$. 此二式又可以写成

$$\mu_{02}\mu_{40}-\mu_{20}\mu_{22}=0 \qquad \mu_{20}\mu_{04}-\mu_{02}\mu_{22}=0$$

由此，又得到

$$\mu_{40}\mu_{04}-\mu_{22}^2=0$$

然而，这是不可能的.

对于一些比较常见的区域，很容易构造七点五次求积公式. 下面举几个例子.

1. 设 R_2 为三角形区域：$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x+y\leqslant 1$. 则R_2上的基本直交多项式为

$$P^{3,0}=x^3-\frac{9}{7}x^2+\frac{3}{7}x-\frac{1}{35}$$

$$P^{2,1}=x^2y-\frac{1}{7}x^2-\frac{4}{7}xy+\frac{2}{21}x+\frac{1}{21}y-\frac{1}{105}$$

$$P^{1,2}=P^{2,1}(x,y) \qquad P^{0,3}=P^{3,0}(y,x)$$

计算式(1.13)中的积分，得到

$$A=C=-\frac{8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 7!} \qquad B=\frac{8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 7!}$$

可见$A^2+B^2+C^2>0$. 解方程组(1.23)，可得其解之一为 $\alpha=\beta=\gamma$

$=1$. 因此，依式(1.22)得

$$P_{3,1}=x^2y+xy^2+y^3-\frac{1}{7}x^2-\frac{8}{7}xy-\frac{10}{7}y^2$$
$$+\frac{1}{7}x+\frac{4}{7}y-\frac{1}{21}$$
$$P_{3,2}=-xy^2-x^2y-x^3+\frac{1}{7}y^2+\frac{8}{7}xy$$
$$+\frac{10}{7}x^2-\frac{1}{7}y-\frac{4}{7}x+\frac{1}{21}$$

再依式(1.21)得

$$\begin{aligned}P_{3,3}&=xP_{3,1}+yP_{3,2}\\&=-\frac{1}{7}x^3+\frac{2}{7}x^2y-\frac{2}{7}xy^2+\frac{1}{7}y^3+\frac{1}{7}x^2\\&\quad-\frac{1}{7}y^2-\frac{1}{21}x+\frac{1}{21}y\\&=\frac{1}{21}(y-x)[3(y^2+xy+x^2)-6xy-3(y+x)+1]\end{aligned}$$

因为 $P_{3,3}$ 不是$P_{3,1}$与$P_{3,2}$的线性组合，所以此为情形(a).

我们将不写出$P_{3,i}$($i=1$, 2, 3)的公共零点的仔细计算.只需注意，由方程组$P_{3,1}=0$与$P_{3,3}=0$知结点分布在直线$y=x$上. 这将问题转化为解三次的代数方程. 余下的四个结点由方程组$P_{3,1}+P_{3,2}=0$与$P_{3,3}=0$求得.这又将问题归解为求解二次幂的代数方程组. 现在，我们将七点五次的求积公式的结点与系数开列于下表：

x_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{9-2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$	$\frac{9+2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$
y_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{9-2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{9+2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$
C_k	$\frac{9}{80}$	$\frac{155+\sqrt{15}}{2400}$			$\frac{155-\sqrt{15}}{2400}$		

2. 设R_2为轴对称的区域. 显然，R_2亦是中心对称区域，并因此$A^2+B^2+C^2\neq 0$. 三次的基本直交多项式同定理24中的$P^{3,0}$，$P^{1,2}$，$P^{2,1}$，$P^{0,3}$. 但是，由于只要i和k中有一个是奇数时就有$\mu_{ik}=0$，所以

$$P^{3,0}=x^3-\frac{\mu_{40}}{\mu_{20}}x \qquad P^{2,1}=x^2y-\frac{\mu_{22}}{\mu_{20}}y$$

$$P^{1,2}=xy^2-\frac{\mu_{22}}{\mu_{20}}x \qquad P^{0,3}=y^3-\frac{\mu_{04}}{\mu_{02}}y$$

另外，此时还不难算出

$$A=\frac{\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}}(\mu_{22}\mu_{20}-\mu_{02}\mu_{40}) \qquad B=0$$

$$C=\frac{\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}}(\mu_{22}\mu_{02}-\mu_{20}\mu_{04})$$

作为(1.23)的解，我们取

$$\alpha=\mu_{20}\mu_{04}-\mu_{22}\mu_{02},\ \beta=0,\ \gamma=\mu_{02}\mu_{40}-\mu_{22}\mu_{20} \tag{1.38}$$

依式(1.22)有

$$P_{3,1}=yQ \qquad P_{3,2}=-xQ$$

其中

$$Q=\alpha x^2+\gamma y^2-\delta$$

α与γ由式(1.38)给出，$\delta=\mu_{40}\mu_{04}-\mu_{22}^2>0$. 因为$xP_{3,1}+yP_{3,2}=0$故此时为情形(*b*).

为了求出$P_{3,3}$，考虑基本直交多项式的线性组合

$$P_{3,3}=b_1\left(x^3-\frac{\mu_{40}}{\mu_{20}}x\right)+b_2\left(x^2y-\frac{\mu_{22}}{\mu_{02}}y\right)$$
$$+b_3\left(xy^2-\frac{\mu_{22}}{\mu_{20}}x\right)+b_4\left(y^3-\frac{\mu_{04}}{\mu_{02}}y\right)$$

令x和y项的系数为零，得到

$$b_1\frac{\mu_{40}}{\mu_{20}}+b_3\frac{\mu_{22}}{\mu_{20}}=0 \qquad b_2\frac{\mu_{22}}{\mu_{02}}+{}_4\frac{\mu_{04}}{\mu_{02}}=0$$

从而，求得 b_3 和b_4. 将 b_3 和 b_4 代入 $P_{3,3}$ 的表达式，得到

$$P_{3,3}=b_1\left(x^3-\frac{\mu_{40}}{\mu_{22}}xy^2\right)+b_2\left(x^2y-\frac{\mu_{22}}{\mu_{04}}y^3\right)$$

若再引进两个新的参量 $\overline{\lambda}$ 和 $\overline{\mu}$，则上式也可以写成

$$P_{3,3}=\overline{\lambda}(\mu_{22}x^3-\mu_{40}xy^2)+\overline{\mu}(\mu_{04}x^2y-\mu_{22}y^3)$$

不难看出，齐次多项式 $P_{3,3}$ 可分解为三个不同的、实的、一次幂多项式的乘积，因此曲线 $P_{3,3}=0$ 由三条通过原点的直线组成. 若 $\overline{\mu}\neq 0$，这只需验证三次多项式

$$P(t)=\overline{\lambda}(\mu_{22}-\mu_{40}t^2)+\overline{\mu}(\mu_{04}t-\mu_{22}t^3)$$

有三个不同的实根，而这可以由以下事实推知：

$$\operatorname{sign}P(-\infty)=\operatorname{sign}\overline{\mu}$$

$$P\left(-\sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{40}}}\right)=-\overline{\mu}\frac{1}{\mu_{40}}\sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{40}}}\delta$$

$$P\left(\sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{40}}}\right)=\overline{\mu}\frac{1}{\mu_{40}}\sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{40}}}\delta$$

$$\operatorname{sign}P(+\infty)=-\operatorname{sign}\overline{\mu}$$

当 $\overline{\mu}=0$ 时，结论是显然的.

现在，我们证明，适当地选择 $\overline{\lambda}$ 和 $\overline{\mu}$，则 $P_{3,3}=0$ 与二次曲线 $Q\equiv\alpha x^2+\gamma y^2-\delta=0$ 有六个实的交点. 若 $\alpha>0$，$\gamma>0$，则 $Q=0$ 是椭圆，从而，对于任意的不同时为零的参数 $\overline{\lambda}$ 和 $\overline{\mu}$，结论是正确的. 当 α 与 γ 中至少有一个是正的时（例如，$\alpha>0$），取 $\overline{\lambda}=0$，$\overline{\mu}=1$，则 $P_{3,3}=0$ 等价于 $y=0$ 和 $y=\pm\sqrt{\frac{\mu_{04}}{\mu_{22}}}x$，它们与曲线 $Q=0$ 有六个不同的实的交点：

$$\left(\pm\sqrt{\frac{\delta}{\alpha}},\ 0\right)\qquad\left(\pm\sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{02}}},\ \pm\sqrt{\frac{\mu_{04}}{\mu_{02}}}\right)$$

若 $\gamma>0$，则取 $\overline{\lambda}=1$，$\overline{\mu}=0$，也可以求得六个实的交点.

令 R_2 表示圆 $x^2+y^2\leqslant 1$. 曲线 $Q=0$ 是圆周 $x^2+y^2=\frac{2}{3}$，因此对于任意的$\overline{\lambda}$和$\overline{\mu}$，圆周曲线与 $P_{3,3}=0$有六个实的不同的交点.

取 $\overline{\lambda}=0$，$\overline{\mu}=1$，方程 $P_{3,3}=0$ 确定了三条直线 $y=0$，$y=\pm\sqrt{3}x$. 求积公式的六个结点为圆 $x^2+y^2\leqslant\frac{2}{3}$的内接正六边形的顶点(其中有两个结点位在 x 轴上)，而第七个结点是坐标原点. 下表开列了求积公式的结点与系数：

x_k	0	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{-1}{\sqrt{6}}$	$\frac{-\sqrt{2}}{3}$	$\frac{-1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
y_k	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$
C_k	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$					

令R_2表方域：$-1\leqslant x$，$y\leqslant 1$. 曲线$Q=0$是圆周曲线 $x^2+y^2=\frac{14}{15}$. 下表就 $\overline{\lambda}=0$，$\overline{\mu}=1$ 的情形开列了求积公式的结点与系数：

x_k	0	$\sqrt{\frac{14}{15}}$	$-\sqrt{\frac{14}{15}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$
y_k	0	0	0	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$
C_k	$\frac{8}{7}$	$\frac{20}{63}$		$\frac{5}{9}$			

§9. 求积公式与直交多项式

对于通常的定积分，下面的定理说明了求积公式与直交多项式的关系.

定理 25 令(a, b)表数轴上的有限或无限的区间，$W(x)$ 是

(a, b)上的非负可积函数. 又令$x_1, x_2, \cdots, x_N$是N个不同的点, 并定义$P_N(x)=(x-x_1)\times(x-x_2)\cdots(x-x_N)$, 则求积公式

$$\int_a^b W(x)f(x)dx=\sum_{i=1}^N A_i f(x_i)$$

为$N+k(0\leqslant k\leqslant N-1)$次求积公式的充分必要条件是$P_N(x)$与全体的次数$\leqslant k$的多项式直交.

当$k=N-1$时, 定理的证明可参阅Крылов的书[81]. 当$0\leqslant k<N-1$时, 定理的证明类似于$k=N-1$时的证明. 当$k=N-1$时, 上述求积公式中的x_i与$A_i(i=1, 2, \cdots, N)$是唯一确定的, 并且$W(x)\geqslant 0(x\in(a, b))$保证了全体$x_i(i=1, 2, \cdots, N)$是实的, 是$(a, b)$的内点及全体$A_i(i=1, 2, \cdots, N)$的正性.

在这一节, 我们试图将定理25的结论推广到多元函数积分的情形. 假如已知一直交多项式集和它们的公共零点, 并假定这些零点(或它们的子集)可以用来作求积公式的结点的话, 则上述的推广是可能的. 结论由定理26给出. 另一方面, 若已知一个$N<N(n, d)$点求积公式有d次代数精度, 则可以找到一具有一定直交性的多项式集, 它们以求积公式的结点为其公共零点(见定理27). 为简单计, 仅针对$n=2$的情形证明这些定理, 实际上, 它们对任意的n都是对的.

以下记号是要用到的:

1. $M\equiv(2,d)\equiv(d+1)(d+2)/2$
2. $P_{m,i}(x,y)$表一真正m次的多项式
3. $Q_k(x,y)$, $Q_{k,i}^{\alpha,\beta}(x,y)$等表示次数$\leqslant k$的多项式
4. m和k表示任意固定的整数, 且$1\leqslant m$, $0\leqslant k<m, d=m+k$
5. x_i, y_i, B_i, $i=1, 2, \cdots, N(N<M)$, 是实数或复数
6. α, β是非负整数
7. $L_2^d=\{(\alpha,\beta)\text{:} \ 0\leqslant\alpha+\beta\leqslant d\}$
8. $X_{M,N}$是$M\times N$矩阵, 它的行是

$$(x_1^\alpha y_1^\beta, \ \cdots, \ x_N^\alpha y_N^\beta) \qquad (\alpha,\beta)\in L_2^d$$

9．L_N 是 L_2^d 的含有 N 个元素的子集

10．$\mathbf{X}_{N,N}$是$N\times N$矩阵，它的行是

$$(x_1^\alpha y_1^\beta, \ \cdots, \ x_N^\alpha y_N^\beta) \quad (\alpha,\beta)\in L_N$$

假定已知多项式集

$$P_{m,1}(x,y), \ P_{m,2}(x,y), \ \cdots, \ P_{m,l}(x,y) \quad l\geqslant 2 \quad (1.39)$$

满足下列条件：

a. 多项式集（1.39）是线性无关的，并且每一个均与所有的$Q_k(x,y)$直交

b. $P_{m,1}(x_i,y_i)=\cdots=P_{m,l}(x_i,y_i)=0$，$i=1$，2，…，$N$

c. 矩阵 $\mathbf{X}_{M,N}$ 的秩数为N，换言之，对某 L_N 矩阵 $\mathbf{X}_{N,N}$ 是满秩的

d. 对于使得$\mathbf{X}_{M,N}$的秩数为N的某L_N有下列事实成立：对每个$(\alpha,\ \beta)\in L_2^d\backslash L_N$有多项式$Q_{k,i}^{\alpha,\beta}(x,y)$（$i=1$，2，…，$l$）和实数$b_{\alpha^*,\beta^*}$（$(\alpha^*,\ \beta^*)\in L_N$）使得

$$Q_{k,1}^{\alpha,\beta}P_{m,1}+\cdots+Q_{k,l}^{\alpha,\beta}P_{m,l}=x^\alpha y^\beta+\sum_{L_N}b_{\alpha^*,\beta^*}x^{\alpha^*}y^{\beta^*} \quad (1.40)$$

定理 26 若$P_{m,1},P_{m,2}$，…，$P_{m,l}$满足上述条件a、b、c，和d，则有常数A_i（$i=1$，2，…，N）使得

$$\int_{R_2}W(x,y)Q_d(x,y)dxdy=\sum_{i=1}^{N}A_iQ_d(x_i,y_i) \quad (1.41)$$

对于任意的次数不超过d的多项式均成立.

证 选取L_n满足条件d. 解下列方程组算出A_i（它们是式(1.41)中的求积系数）：

$$\begin{pmatrix} x_1^{\alpha_1}y_1^{\beta_1}\cdots x_N^{\alpha_1}y_N^{\beta_1}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_1^{\alpha_N}y_1^{\beta_N}\cdots x_N^{\alpha_N}y_N^{\beta_N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ \vdots\\ A_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I(x^{\alpha_1}y^{\beta_1})\\ \vdots\\ I(x^{\alpha_N}y^{\beta_N})\end{pmatrix} \quad (1.42)$$

$$(\alpha_i,\beta_i)\in L_N \qquad i=1, \ 2, \ \cdots, \ N$$

以下证明，求积公式(1.41)是 d 次的公式.

令 $Q_d^{\alpha,\beta}((\alpha,\beta)\in L_1^d\backslash L_N)$ 表(1.40)型的多项式. 从式(1.40)左端可知

$$I(Q_d^{\alpha,\beta})=0$$

$$Q_d^{\alpha,\beta}(x_i,y_i)=0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

从而式(1.41)对 $Q_d^{\alpha,\beta}$ 是精确的. 又依式(1.42)及线性性，知公式(1.41)对

$$\sum_{L_N} b_{\alpha^*,\beta^*} x^{\alpha^*} y^{\beta^*}$$

是精确的. 从而，公式(1.41)对 $x^\alpha y^\beta$ 是精确的. 证毕.

定理 27 设已知一(1.41)型的 d 次求积公式. 若以

$$(x_1^\alpha y_1^\beta,\ \cdots,\ x_N^\alpha y_N^\beta) \qquad 0\leqslant\alpha+\beta\leqslant m-1$$

为行向量的矩阵的秩数是 $\frac{1}{2}m(m+1)$；而以

$$(x_1^\alpha y_1^\beta,\ \cdots,\ x_N^\alpha y_N^\beta) \qquad 0\leqslant\alpha+\beta\leqslant m \qquad (1.43)$$

为行向量的矩阵的秩数是 $1/2\ (m+1)(m+2)-l(l\geqslant0)$，则有 l 个线性无关的多项式

$$P_{m,s}(x,y) \qquad s=1,\ 2,\ \cdots,\ l \qquad (1.44)$$

满足条件：(1) $P_{m,s}(s=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ 与全体 Q_{d-m} 直交，(2) $P_{m,1}(x_i,\ y_i)=\cdots=P_{m,l}(x_i,\ y_i)=0$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$.

证 线性无关并有公共零点 $(x_i,\ y_i)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ 的多项式集的存在性可以从矩阵(1.43)的 l 行是其它行的线性组合这一事实推论出来. 又因为求积公式有 d 次的代数精度，所以

$$\int_{R_2} W(x,y)P_{m,s}(x,y)Q_{d-m}(x,y)\,dxdy$$

$$=\sum_{i=1}^{N}B_iP_{m,s}(x_i,y_i)Q_{d-m}(x_i,y_i)=0 \qquad s=1,\ 2,\ \cdots,\ l$$

这说明 $P_{m,s}$ 与全体 Q_{d-m} 直交. 证毕.

下面举几个例子，说明定理26和定理27.

例 1 令R_2是方域$C_2(-1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1)$及$W(x,y)=1$. 又令求积公式是Radon的七点五次公式：

点	系数
$(0,0)$	$\frac{8}{7}$
$(0,\pm t)$	$\frac{20}{63}$
$(\pm r,\pm s)$	$\frac{5}{9}$

(1.45)

其中

$$r=\sqrt{\frac{3}{5}} \qquad s=\sqrt{\frac{1}{3}} \qquad t=\sqrt{\frac{14}{15}}$$

此时 $M=21$, $N=7$. 还不难证明，行为

$$(x_1^\alpha y_1^\beta,\ \cdots,\ x_7^\alpha y_7^\beta)$$

$$(\alpha,\beta)\in\{(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (2,0),\ (1,1),\ (0,2),\ (0,3)\} \tag{1.46}$$

的矩阵$\mathbf{X}_{77}$是满秩的. 依定理27可知(此时$m=3$, $l=3$)，应有三个线性无关的多项式满足定理27的条件(1)和(2). 事实上，不难证明，它们是多项式

$$P_{3,1}=x^3-\frac{3}{5}x \qquad P_{3,2}=xy^2-\frac{1}{3}x$$

$$P_{3,3}=x^2y+y^3-\frac{14}{15}y \tag{1.47}$$

我们还可以用这个例子说明定理26.

假定我们设法给出了与全体Q_2直交的多项式集(1.47)，则我们可以算出它们的公共零点就是求积公式(1.45)中的求积结点，

并且通过解线性方程组(它的系数矩阵是(1.46))还可以算出A_1, A_2, …, A_7.为了验证所得到的公式为五次求积公式，只需对单项式

x^3, x^2y, xy^2, x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4, x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5验证条件d. 下面的方程恰好证实了这点：

$$P_{3,1}=x^3-\frac{3}{5}x$$

$$P_{3,3}=x^2y+y^3-\frac{14}{15}y$$

$$P_{3,2}=xy^2-\frac{1}{3}x$$

$$xP_{3,1}=x^4-\frac{3}{5}x^2$$

$$yP_{3,1}=x^3y-\frac{3}{5}xy$$

$$xP_{3,2}=x^2y^2-\frac{1}{3}x^2$$

$$yP_{3,2}=xy^3-\frac{1}{3}xy$$

$$yP_{3,3}-xP_{3,2}=y^4-\frac{14}{15}y^2+\frac{1}{3}x^2$$

$$\left(x^2+\frac{3}{5}\right)P_{3,1}=x^5-\frac{9}{25}x$$

$$y^2P_{3,1}+\frac{3}{5}P_{3,3}=x^3y^2-\frac{1}{5}x$$

$$xyP_{3,2}+\frac{1}{3}P_{3,3}=x^2y^3+\frac{1}{3}y^3-\frac{14}{15}y$$

$$\left(y^2+\frac{1}{3}\right)P_{3,2}=xy^4-\frac{1}{9}x$$

$$\left(y^2-\frac{1}{3}\right)P_{3,3}-xyP_{3,2}=y^5-\frac{19}{15}y^3+\frac{14}{15}y$$

$$xyP_{3,1}+\frac{3}{5}P_{3,3}=x^4y+\frac{3}{5}y^3-\frac{14}{25}y$$

例 2 令 R_2 是例 1 中的方域 C_2，$W(x,y)=1$. 又令求积公式是十二点七次的 Мысовских和 Phillips 公式 ($V=4$是 C_2 的面积)：

$$(r,0),\ (-r,0),\ (0,r),\ (0,-r) \qquad A_1$$

$$(s,0),\ (-s,0),\ (0,s),\ (0,-s) \qquad A_2$$

$$(\pm t,\pm t) \qquad A_3$$

其中

$$r^2=\frac{105+3\sqrt{385}}{140} \qquad s^2=\frac{105-3\sqrt{385}}{140} \qquad t^2=\frac{3}{5}$$

$$A_1=\frac{77-3\sqrt{385}}{891}V \qquad A_2=\frac{77+3\sqrt{385}}{891}V \qquad A_3=\frac{25}{324}V$$

上述求积公式的求积结点是直交多项式

$$P_{4,1}=x^3y-\frac{3}{5}xy \qquad P_{4,2}=xy^3-\frac{3}{5}xy$$

$$P_{4,3}=x^4+\frac{27}{14}x^2y^2+y^4-\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}y^2+\frac{27}{70}$$

的公共零点. 上述多项式满足条件 a, b, c, d(取 $L_N=\{(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$, $(3,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(0,3)$, $(4,0)$, $(0,4)\}$).

在定理26中，我们限制全体多项式均为 m 次的多项式，其实这一限制是可以取消的，我们用下例来说明这一点.

例 3 令 R_2 是方域C_2(同例1)，$W(x,y)=1$. 又令求积公式是八点五次的Burnside公式

$(r,0)\quad(-r,0)\quad(0,r)\quad(0,-r)\qquad\qquad \frac{10}{49}V$

$(\pm s,\ \pm s)\qquad\qquad \frac{9}{196}V$

其中

$$r=\sqrt{\frac{7}{15}}\qquad\qquad s=\sqrt{\frac{7}{9}}$$

Burnside 求积公式的结点是直交多项式

$$P_{3,1}=x^3-\frac{2}{5}xy^2-\frac{7}{15}x\qquad P_{3,2}=y^3-\frac{2}{5}x^2y-\frac{7}{15}y$$

$$P_{4,1}=x^2y^2-\frac{5}{9}x^2-\frac{5}{9}y^2+\frac{7}{27}$$

的公共零点.多项式$P_{3,1}$和$P_{3,2}$与全体Q_2直交；多项式$P_{4,1}$与全体Q_1直交.关于条件a中线性无关的假设应被解释为没有多项式$Q_{1,1}$和$Q_{1,2}$使得

$$Q_{1,1}P_{3,1}+Q_{1,2}P_{3,2}+P_{4,1}\equiv 0$$

取$L_8=\{(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (2,0),\ (1,1),\ (0,2),\ (2,1),\ (1,2)\}$，可以证明$X_{8,8}$是满秩的.同样，如果分别取$P_{m,1}$，$P_{m,2}$，$P_{m,3}$等于$P_{3,1}$，$P_{3,2}$，$P_{4,1}$，则它们满足条件$d$.

§10.两个变量的 m^2 点 $2m-1$ 次求积公式

设$P_{m,1}$与$P_{m,2}$是两个m次的多项式，并在R_2上关于权函数$W(x,\ y)$与全体次数$\leqslant m-1$的多项式直交. $P_{m,1}$与$P_{m,2}$的公共零点能作为$2m-1$次求积公式的求积结点吗？一般说来，这是不对的.例如，令$R_2=C_2$，$W(x,\ y)=1$，$m=3$及

$$P_{3,1}=P^{2,1}=x^2y-\frac{1}{3}y\qquad P_{3,2}=P^{1,2}=xy^2-\frac{1}{3}x$$

则上述多项式的九个公共零点中，非无穷远点的点只有五个，它

们是 $(0,0)$ 及$\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}},\ \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$. 显然，无论这五个点还是它们的子集均不能作为 C_2 上五次求积公式的求积结点.

定理28 设$P_{m,1}$与$P_{m,2}$有以下性质：(1)$P_{m,1}$与$P_{m,2}$在R_2上关于权$W(x,y)$与全体Q_{m-1}直交，(2)$P_{m,1}$与$P_{m,2}$恰好有m^2个不同的公共零点 $\mathrm{p}_i=(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\cdots,m^2)$，并且它们均不是无穷远点. 则这m^2个公共零点可以作为R_2上的关于权函数$W(x,y)$的$2m-1$次求积公式的结点.

证 本定理的论证基于前节定理26. 注意，多项式$P_{m,1}$与$P_{m,2}$恰好有m^2个公共零点的假设意味着$P_{m,1}$与$P_{m,2}$没有公共支，这可以由Bezout定理推出. 由Noether定理可知，每个以 $\mathrm{p}_i=(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\cdots,m^2)$为零点的多项式Q_s可以表为

$$Q_s=Q_{s-m,1}P_{m,1}+Q_{s-m,2}P_{m,2}$$

记$K=m(m+1)$，$M=m(2m+1)$，则$K/2$是次数$\leqslant m-1$的单项式$x^\alpha y^\beta$的个数；M是次数$\leqslant 2m-1$的单项式的个数. 令$\boldsymbol{Y}_{K,M}$表$K\times M$矩阵，它的行由多项式

$$x^\alpha y^\beta P_{m,1}\text{和}x^\alpha y^\beta P_{m,2}\qquad(0\leqslant\alpha+\beta\leqslant m-1)\qquad(1.48)$$

的系数组成. 行元素的排列方式使得，对于每一对(γ,δ) $(0\leqslant\gamma+\delta\leqslant 2m-1)$，多项式(1.48)中$x^\gamma y^\delta$的系数出现在同一列.

我们指出，$\boldsymbol{Y}_{K,M}$的秩数为K. 若$\boldsymbol{Y}_{K,M}$的秩数$<K$，则$\boldsymbol{Y}_{K,M}$的行向量的线性组合将是零向量. 这等于说，有两个不恒等于零的多项式$Q_{m-1,1}$和$Q_{m-1,2}$使得

$$Q_{m-1,1}P_{m,1}+Q_{m-1,2}P_{m,2}=0$$

从而 $Q_{m-1,1}P_{m,1}\equiv-Q_{m-1,2}P_{m,2}$. 依因式分解的唯一性，$Q_{m-1,2}$是$Q_{m-1,1}P_{m,1}$的一个分支. 这意味着$P_{m,1}$与$P_{m,2}$有一个公共的分支. 但前面已经说过，多项式$P_{m,1}$与$P_{m,2}$并无公共的分支.

由于$\boldsymbol{Y}_{K,M}$的秩数是K，所以$\boldsymbol{Y}_{K,M}$至少有一个满秩的$K\times K$子阵. 令$\boldsymbol{Y}_{K,K}$表这样的一个子阵. 现在，我们定义 $L_K\equiv\{(\alpha,\beta):x^\alpha$

y^β是对应矩阵$\boldsymbol{Y}_{K,K}$的列向量的单项式},$L_{M-K}\equiv\{(\alpha,\beta):x^\alpha y^\beta$是对应矩阵$\boldsymbol{Y}_{K,M}$(但不对应$\boldsymbol{Y}_{K,K}$)的列向量的单项式}. L_K含有K个元素,而L_{M-K}含有$M-K=m^2$个元素. 视L_{M-K}为前节条件c,d中的L_N(换言之,取$N=m^2$),则矩阵$\mathbf{X}_{N,N}$的行是

$$(x_1^\alpha y_1^\beta, \ \cdots, \ x_N^\alpha y_N^\beta) \qquad (\alpha,\beta)\in L_{M-K}$$

我们还要证明条件c和d是满足的。

考虑条件c. 假定$\mathbf{X}_{N,N}$是降秩的,则它的行向量的线性组合将是零向量. 这意味着有多项式$Q_{2m-1}\not\equiv 0$满足

$$Q_{2m-1}(x_i,y_i)=0 \qquad i=1, \ 2, \ \cdots, \ m^2$$

此外,Q_{2m-1}只含有单项式$x^\alpha y^\beta$,$(\alpha,\beta)\in L_{M-K}$. 依 Noether 定理,有不恒为零的$Q_{m-1,1}$与$Q_{m-1,2}$使得

$$Q_{2m-1}=Q_{m-1,1}P_{m,1}+Q_{m-1,2}P_{m,2} \qquad (1.49)$$

式(1.49)的右端代表$\boldsymbol{Y}_{K,M}$的行的线性组合. 因为$\boldsymbol{Y}_{K,K}$是满秩的,(1.49)型的多项式必然至少含有一个对应$\boldsymbol{Y}_{K,K}$的列向量的单项式$x^\alpha y^\beta$. 换言之,Q_{2m-1}必含单项式$x^\alpha y^\beta$,$(\alpha,\beta)\in L_K$. 这与Q_{2m-1}只含单项式$x^\alpha y^\beta$,$(\alpha, \ \beta)\in L_{M-K}$相矛盾. 因此,不可能有这样的$Q_{2m-1}$存在,从而$\mathbf{X}_{N,N}$是满秩的.

次之,考虑条件d. 对于每个$x^\alpha y^\beta$,$(\alpha, \ \beta)\in L_K$,我们必须证明,有$Q_{m-1,1}$和$Q_{m-1,2}$使得

$$Q_{m-1,1}P_{m,1}+Q_{m-1,2}P_{m,2}=x^\alpha y^\beta+\sum_{(\alpha^*,\beta^*)\in L_{M-K}} b_{\alpha^*,\beta^*}x^{\alpha^*}y^{\beta^*}$$

假定$x^\alpha y^\beta$对应$\boldsymbol{Y}_{K,K}$的第i列。由$\boldsymbol{Y}_{K,K}$是满秩的,我们可以求解线性组

$$\boldsymbol{Y}_{K,K}^T\mathbf{c}=\boldsymbol{e}$$

此处向量$\boldsymbol{e}$的元素除第i个为1外余者全为零. 向量$\mathbf{c}$确定了$Q_{m-1,1}$,$Q_{m-1,2}$. 若$\boldsymbol{Y}_{K,M}$行的顺序是

$$P_{m,1}, \ xP_{m,1}, \ yP_{m,1}, \ x^2P_{m,1}, \ \cdots, \ y^{m-1}P_{m,1},$$
$$P_{m,2}, \ xP_{m,2}, \ yP_{m,2}, \ x^2P_{m,2}, \ \cdots, \ y^{m-1}P_{m,2},$$

及

$$\mathbf{c}=(C_{1,1},\ \cdots,\ C_{1,K/2},\ C_{2,1},\ \cdots,\ C_{2,K/2})^T$$

则当$i=1$，2时

$$Q_{m-1,2}=C_{i,1}+C_{i,2}x+C_{i,3}y+C_{i,4}x^2+\cdots+C_{i,K/2}y^{m-1}$$

定理证毕.

举一个例子．令 $R_2=C_2$，$W(x,\ y)=1$，$m=2$ 及

$$P_{2,1}=-\frac{1}{3}+x^2+xy \qquad P_{2,2}=-\frac{1}{3}+y^2$$

此时$K=6$，$M=10$，若按(1.50)的顺序排列$\boldsymbol{Y}_{6,10}$的行，则

$$\boldsymbol{Y}_{6,10}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可以证明，由$\boldsymbol{Y}_{6,10}$的最后六列作成的 6 × 6 矩阵$\boldsymbol{Y}_{6,6}$是满秩的．因此，可取

$$L_6=\{(1,1),\ (0,2),\ (3,0),\ (2,1),\ (1,2),\ (0,3)\}$$

$$L_{10-6}=\{(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (2,0)\}$$

$P_{2,1}$，$P_{2,2}$的四个公共零点是：

$$(x_1,y_1)=-(x_2,y_2)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$(x_3,y_3)=-(x_4,y_4)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

矩阵

$$\mathbf{X}_{4,4}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \end{pmatrix}$$

是满秩的．因此，我们可以通过解线性方程组求出求积公式

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,\ y)\,dx\,dy \cong \sum_{i=1}^{4} A_i f(x_i,\ y_i)$$

的系数A_i（依求积公式对1，x，y，x^2是精确的要求）．

验证条件 d 的多项式是

$$P_{2,1}=xy+x^2-\frac{1}{3} \qquad x P_{2,2}=xy^2-\frac{1}{3}x$$

$$P_{2,2}=y^2-\frac{1}{3} \qquad yP_{2,2}=y^3-\frac{1}{3}y$$

$$(x-y)P_{2,1}+P_{2,2}=x^3-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y$$

$$yP_{2,1}-xP_{2,2}=x^2y+\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y$$

条件d确保求积公式对xy，y^2，x^3，x^2y，xy^2，y^3亦是精确的，因此求积公式为三次求积公式．

对于给定的R_2和$W(x,\ y)$，Goit[80]指出了如何构造有四个有限的实的公共零点的两个线性无关的二次直交多项式$P_{2,1}$和$P_{2,2}$．他未能证明它们的四个公共零点总是不同的．也还没有找到反例．

§11．再论求积公式与直交多项式

下面，我们指出多项式集的公共零点可作为求积公式

$$\iint_{R_2} W(x,\ y)\,f(x,\ y)\,dx\,dy \cong \sum_{i=1}^{N} A_i f(x_i,\ y_i)$$

的求积结点的充要条件.

再引进一些记号：

(i) 当需要排列单项式 $x^\alpha y^\beta$ 的顺序时，我们总是按以下顺序排列的

$$1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ x^3,\ x^2y,\ \cdots$$

(ii) 若 $Q_d=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+\cdots+a_{0d}y^d$，则$\mathbf{W}_Q$表示$Q_d$的系数作成的向量：

$$\mathbf{W}_Q\equiv(a_{00},\ a_{10},\ a_{01},\ a_{20},\ \cdots,\ a_{0d}) \qquad (1.50)$$

(iii) $\mathscr{W}_d$是全体多项式Q_d的M维空间，$\mathscr{W}_d$的元素即全体(1.50)型的向量(注意$M=(d+1)(d+2)/2$).

(iv) 若 $Q_{d,j}$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ K$，$K<M$，是任给的K个线性无关多项式的集合，则$\mathscr{U}_K$表示由$Q_{d,j}$生成的$\mathscr{W}_d$的K维子空间.

(v) $\mathscr{W}_d^\bullet$表$\mathscr{W}_d$的共轭(或对偶)空间.

(vi) 若$\mathbf{p}\equiv(x,\ y)$，则μ_p表示向量

$$\mu_p\equiv(1,\ x,\ y,\ x^2,\ \cdots,\ y^d) \qquad (1.51)$$

因为$Q_d(x,\ y)=(\mathbf{W}_Q,\ \mu_p)$，所以$\mu_p$是$\mathscr{W}_d^\bullet$的元素.

(vii) $\mathscr{U}_K^0$表示子空间$\mathscr{U}_K$的零化子，亦即$\mathscr{U}_K^0$是由全体$\mathscr{W}_d^\bullet$中满足$(\mathbf{W}_Q,\ \mu)=0(\mathbf{W}_Q\in\mathscr{U}_K)$的元素组成. 我们指出，若$\mathscr{W}_d=\mathscr{U}_K+\mathscr{U}_N$，$K+N=M$，则$\mathscr{W}_d^\bullet=\mathscr{U}_K^0+\mathscr{U}_N^0$，此处$\mathscr{U}_K^0$与$\mathscr{U}_N$同构，$\mathscr{U}_N^0$与$\mathscr{U}_K$同构. 二阶共轭空间$\mathscr{W}_d^{\bullet\bullet}$与$\mathscr{W}_d$同构，因此$\mathscr{U}_K^{00}$，$\mathscr{U}_N^{00}$分别与$\mathscr{U}_K$，$\mathscr{U}_N$同构.

设已知一线性无关的多项式集$Q_{d,j}(x,\ y)$，$j=1,2,\cdots,K$，$K<M$；又设$\mathbf{p}_i=(x_i,\ y_i)$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$，$N=M-K$，是这些多项式的公共零点.

定理 29 由$\mathbf{p}_i$构成的矩阵$\mathbf{X}_{M,N}$具有秩数N的充要条件是，每一个以全体$\mathbf{p}_i$为零点的多项式$Q_d(x,\ y)$能够表为

$$Q_d=c_1Q_{d,1}+c_2Q_{d,2}+\cdots+c_KQ_{d,K} \qquad (1.52)$$

证 这个定理是在(vii)中所谈及的向量空间的结果的一个推论. 令$\mathscr{U}_K$表由$Q_{d,j}$生成的$\mathscr{W}_d$的子空间. 若矩阵$\mathbf{X}_{M,N}$的秩数为N，则向量

$$\mu_{pi}=(1,\ x_i,\ y_i,\ x_i^2,\ \cdots,\ y_i^d)\quad i=1,\ 2,\ \cdots,N$$

是线性无关的，并生成$\mathscr{U}_K^o$. 因此，$\mathscr{U}_K^{oo}$的维数是K，并由$Q_{d,j}$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ K$，生成.

假如$\mathbf{X}_{M,N}$的秩数$N_0<N$，则$\mathscr{W}_d^*=\mathscr{U}_{K_0}^o+\mathscr{U}_{N_0}^o$. 此处$K_0=M_d-N_0>K$，并且$\mathscr{U}_{K_0}$是由$\mu_{p_i}$生成的线性子空间. $\mathscr{U}_K^{oo}$与$\mathscr{W}_d$的那个子空间同构，该子空间由全体在$\mathbf{p}_i$处取零值的Q_d组成. $\mathscr{U}_K^{oo}$的维数是$K_0<K$，并因此每一个在全体$\mathbf{p}_i$处取零值的多项式不能表为式(1.52)的形式. 证毕.

定理 30 假定

(a^*) 已知一d次精度，$N(<M)$个求积结点$\mathbf{p}_i=(x_i,y_i)$的求积公式(1.49)；

(b^*) 由$\mathbf{p}_i$构成的矩阵$\mathbf{X}_{M,N}$的秩数为N. 则有多项式$Q_{d,j}(x,y)$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ K$，$K=M-N$，它们有下列性质：

(a) $Q_{d,j}$是线性无关的

(b) $\displaystyle\iint_R W(x,y)Q_{d,j}(x,y)\,dxdy=0,\qquad j=1,\ 2,\ \cdots,K$

(c) $\mathbf{p}_i$是全体$Q_{d,j}$的零点

(d) 每一个在$\mathbf{p}_i$处取零值的多项式Q_d可以表为

$$Q_d=c_1Q_{d,1}+c_2Q_{d,2}+\cdots+c_KQ_{d,K}$$

证 首先我们指出，条件(b^*)保证d次求积公式的结点$\mathbf{p}_i$的个数N是不能再减少了，换言之，我们不能用$\mathbf{p}_i$的子集$N_0<N$个结点构造出这样的公式.

因为$\mathbf{X}_{M,N}$的秩数为N，故有L_N使得$\mathbf{X}_{N,N}$是满秩的. 从而，$\mathbf{X}_{M,N}$的$K=M-N$行

$$(x_1^\alpha y_1^\beta,\ \cdots,\ x_N^\alpha y_N^\beta)\qquad (\alpha,\beta)\in L_d^2\backslash L_N$$

与$\mathbf{X}_{N,N}$的行是线性相关的．这蕴涵着具有性质(a)和(c)的多项式$Q_{d,j}$，$j=1, 2, \cdots, K$，是存在的．

因为求积公式的代数精度是d，并且全体$\mathbf{p}_i$是$Q_{d,j}(j=1,2,\cdots,K)$的零点，所以$Q_{d,j}$满足(b)．条件(d)由定理29自得．证毕．

定理 31 设已知多项式$Q_{d,j}$，$j=1, 2, \cdots, K$，它们有以下性质：

(a) $Q_{d,j}$是线性无关的

(b) $\iint_{R_2} W(x,y)Q_{d,j}(x,y)\,dxdy=0, \qquad j=1,2,\cdots,K$

(c) $Q_{d,j}$有$N=M-K$个公共零点 $\mathbf{p}_i\equiv(x_i,y_i)$

(d) 任意的以全体$\mathbf{p}_i$为零点的多项式可写成

$$Q_d=c_1Q_{d,1}+c_2Q_{d,2}+\cdots+c_kQ_{d,K}$$

则

(a^*) $\mathbf{p}_i$可以作为d次求积公式(1.49)的结点

(b^*) 由$\mathbf{p}_i$作成的矩阵$\mathbf{X}_{M,N}$的秩数为N．

证 依定理29，条件(a)，(c)，(d)蕴涵(b^*)．因此，有L_N使得$\mathbf{X}_{M,N}$的子阵$\mathbf{X}_{N,N}$是满秩的．故能找到系数A_i，$i=1,2,\cdots,N$，使得求积公式对单项式$x^{\alpha}y^{\beta}$，$(\alpha,\beta)\in L_N$，是精确的．剩下需要证明，所得公式对单项式

$$x_{\alpha}y^{\beta} \qquad (\alpha,\beta)\in L_2^d\backslash L_N \tag{1.53}$$

是精确的．

考虑集式(1.53)中的任意单项式$x^{\gamma}y^{\delta}$．因为$\mathbf{X}_{N,N}$是满秩的，我们能够将与$x^{\gamma}y^{\delta}$对应的$\mathbf{X}_{M,N}$的行表为$\mathbf{X}_{N,N}$的行的线性组合．这给出一个以全体$\mathbf{p}_i$为零点的多项式$Q_d^{\gamma,\delta}$．因此$Q_d^{\gamma,\delta}$能表为$Q_{d,j}$的线性组合

$$Q_d^{\gamma,\delta}=c_1Q_{d,1}+c_2Q_{d,2}+\cdots+c_KQ_{d,K} \tag{1.54}$$

依(b)和式(1.54)，我们看出

$$\iint_{R_2} W(x,y) Q_d^{\gamma,\delta}(x,y)\,dx\,dy = 0 \tag{1.55}$$

依式(1.54)，我们看出 $Q_d^{\gamma,\delta}(x_i, y_i) = 0$，$i = 1, 2, \cdots, N$，并因此 $Q_d^{\gamma,\delta}$的求积和是零.依此及式(1.55)，说明求积公式对$Q_d^{\gamma,\delta}$是精确的.

顺便指出

$$Q_d^{\gamma,\delta} \doteq x^\gamma y^\delta + \sum_{L_N} c_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta \tag{1.56}$$

其中 $c_{\alpha,\beta}$是常数，且求和取遍全体$(\alpha, \beta) \in L_N$. 因为求积公式对 $Q_d^{\gamma,\delta}$是精确的，对式(1.56)中的和式的项也是精确的，故对$x^\gamma y^\delta$亦必然是精确的. 证毕.

我们给出几个例子：

例 1 令 $P_{3,i}(x,y)$ ($i = 1, 2, 3$)是在§7中考虑的三个三次多项式. 若它们有七个不同的公共零点，我们已经证明用这些点可以构造五次求积公式. 此时$M = 21$，$N = 7$，并且可以证明下列18个多项式中的14个是线性无关的：

$$P_{3,i},\ xP_{3,i},\ yP_{3,i},\ x^2P_{3,i},\ xyP_{3,i},\ y^2P_{3,i} \quad i = 1, 2, 3$$

因此，有$K = 14$个线性无关的多项式，它们以这七个点为公共零点.

例 2 考虑 C_2 上的八点五次求积公式 (见附录 I 公式2). 此时$M = 21$，$N = 8$，$K = 13$. 求积结点是13个线性无关的多项式

$$P_{3,1} = x^3 - \frac{2}{5}xy^2 - \frac{5}{17}x \qquad P_{3,2} = y^3 - \frac{2}{5}x^2y - \frac{5}{17}y$$

$$P_{4,1} = x^2y^2 - \frac{5}{9}x^2 - \frac{5}{9}y^2 + \frac{7}{27}$$

$$xP_{3,i},\ yP_{3,i},\ x^2P_{3,i},\ xyP_{3,i},\ y^2P_{3,i} \qquad i = 1,\ 2$$

的公共零点.

例 3 考虑一维的m点，$2m-1$次代数精度的Gauss求积公

式．此时$M=2m$，$N=m$，并且求积结点是$K=m$个线性无关的多项式

$$x^k P_m(x) \qquad k=0,1,\cdots,m-1$$

的公共零点．此处，$P_m(x)$是m次的直交多项式．

§12．边界型求积公式

在这一节中，我们采用纯代数方法对一些常见的区域构造一系列不含被积函数微商项或含有被积函数低阶微商项的边界型公式．边界型求积公式是求积结点全部分布在积分区域边界上的求积公式．对于在实际中常遇到的只能测知被积函数在边界上的数值，而要求计算它在区域上积分值的问题，边界型求积公式无疑是极有价值的．对于定积分的情形，人们早已建立了一批较好的边界型求积公式，如第三章§1中的Petr公式和Obreschkoff公式等．对于一般高维有界区域上的多重积分，构造边界型求积公式的最有效的方法是第三、四、五章中提出的降维展开法，特别是具有代数精度的降维展开法．该方法不仅可以构造出具有高精度的边界型公式，而且对于几种特殊区域而言，还可以构造出具有任意予先指定的代数精度及最少边界结点个数的最优边界型求积公式（见第三章§5），但这类公式中都含有较高阶的导数项，因而对被积函数的光滑程度要求较高．

在被积函数只具有连续性或光滑度较低时，可以用代数方法中的对称原则（见【1】第一章）构造边界型求积公式．这类公式的构造步骤比较简单，而且公式的具体形式也较为明快易用，但它们在实用上的主要缺点是不够精确．特别是不带微商项的边界型求积公式只能有三次或五次的代数精度，并且无法再提高，亦即它的代数精度囿于先天界限．为了突破这个先天界限的限制，提高不带微商项边界型求积公式的代数精度，可以考虑构造带有低阶（如1阶）微商项的边界型公式．

顺便指出，【1】第十二章中给出了一批不带微商项的边界型求积公式，它们已在本节中全部得到改进.

设R_n是一个n维区域，假如R_n包含一点x时，它必同时包含x的一切对称点(亦即交换x的坐标分量并添加正负号后所得的一切异于x的点)，则称R_n为对称区域.

同理，一个数值求积公式(求积和)中所用到的结点，假如能划分为若干对称点组，且同一组内诸点所对应的求积系数都相等，那末便称该公式为对称的求积公式.

下面，我们先来介绍Sadowsky的开作[46]. 设C_3表示三维立方体($-1\leqslant x\leqslant 1$, $-1\leqslant y\leqslant 1$, $-1\leqslant z\leqslant 1$). Sadowsky构造了C_3上的42点5次边界型求积公式. 我们来详细地说明这个公式的构造方法.

C_3是一个对称区域. 对于这种区域来说，构造对称求积公式是方便的. 实际上，Sadowsky公式就可以按照构造对称求积公式的基本原则(参阅【53】，【60】)推导出来.

我们选择如下三组对称点组作为求积结点：

$$(0,0,1)_{FS}\quad (0,1,1)_{FS}\quad (x_0,x_0,1)_{FS} \tag{1.57}$$

其中x_0是待定的($0<x_0<1$)，而$(\cdot,\cdot,\cdot)_{FS}$表示由$(\cdot,\cdot,\cdot)$生成的对称点组，$(\cdot,\cdot,\cdot)$称为生成者. 三组点共42个，记这三组点对应的求积公式的权系数分别为L, M, N. 我们写出如下公式

$$\iint_{C_3} f(x,y,z)\,dxdydz\approx L\sum f_6+M\sum f_{12}+N\sum f_{24} \tag{1.58}$$

其中$\sum f_6$, $\sum f_{12}$和$\sum f_{24}$表示函数f分别在三个对称点组(1.57)上的值的和. 依对称求积公式的构造原则，为了使求积公式(1.58)具有五次的代数精度，需且只需求积公式(1.58)对于函数1, x^2, x^4和x^2y^2成为精确等式就可以了. 与上面被积函数相对应的积分值分别为8，8/3，8/5和8/9；从而由式(1.58)得到

$$\begin{cases} 6L + 12M + \qquad\qquad 24N = 8 \\ 2L + 8M + (8 + 16x_0^2)N = 8/3 \\ 2L + 8M + (8 + 16x_0^4)N = 8/5 \\ \qquad 4M + (16x_0^2 + 8x_0^4)N = 8/9 \end{cases} \tag{1.59}$$

解方程组(1.59)得

$$x_0 = \sqrt{\frac{5}{8}} \qquad L = \frac{364}{225} \qquad M = -\frac{160}{225} \qquad N = \frac{64}{225}$$

这样，我们便导出了 Sadowsky 公式

$$\iiint_{C_3} f(x,y,z)\,dxdydz = \frac{4}{225}\left[91\sum f_6 - 40\sum f_{12} + 16\sum f_{24}\right] \tag{1.60}$$

可以断言，对于C_3域上的积分而言，最多只能构造具有五次代数精确度的边界型求积公式.事实上，若取

$$f(x,y,z) = (x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)$$

则$f(x,y,z)$是 6 次的多项式，并且在C_3的边界面上恒等于零. 从而，无论边界型求积公式的结构如何，对上面的函数$f(x,y,z)$说来，求积和总是零，而$f(x,y,z)$在 C_3 上的积分的精确值却是 $-64/27$.

由此看来，在代数精确度的意义下，如果不用被积函数微商的值，我们最多只能构造出具有五次代数精确度的边界型求积公式. 换言之，代数精确度 5 是这种类型公式所不能超越的先天界限.

往下我们改进Sadowsky公式，构造出 C_3 上32点的五次边界型求积公式.

我们把满足下述条件的点组称为n维五次对称点组

1. 含有奇次方幂的次数$\leqslant 5$ 的 n 元单项式在该点组上值的和为零;

2. 只含偶次方幂的次数$\leqslant 5$ 的n 元单项式在该点组上值的

和关于 n 个元对称，即仅依赖于单项式的方幂数值组.

例如C_3边界上的点组

Ⅰ：$(\pm 1, \pm x_0, 0)$，$(\pm x_0, 0, \pm 1)$，$(0, \pm 1, \pm x_0)$ $(0<x_0<1)$

就是一个(3 维)五次对称点组. 事实上，对于单项式

$$A_1 = x^\alpha y^\beta z^\gamma \qquad \alpha+\beta+\gamma \leqslant 5$$

当α，β，γ中有一个为奇数时，A_1在点组Ⅰ上的值的和显然为零. 而当α，β，γ都为偶数(包括零)时，A_1和

$$A_2 = x^\alpha y^\gamma z^\beta, \qquad A_3 = x^\beta y^\alpha z^\gamma, \qquad A_4 = x^\beta y^\gamma z^\alpha$$

$$A_5 = x^\gamma y^\alpha z^\beta, \qquad A_6 = x^\gamma y^\beta z^\alpha$$

在点组Ⅰ上值的和均相等.

显然，对称点组皆为 5 次对称点组. 但是由上例知，反之并不成立.

为了减少计值点的个数，我们要设法用特殊的五次对称点组去代替一般对称点组来构造五次求积公式. 根据这一考虑，我们来改进Sadowsky公式.

不难明白，除上述点组Ⅰ以外，C_3边界上的五次对称点组还有如下 6 种：

Ⅱ：$(\pm 1, \pm 1, 0)$ $(\pm 1, 0, \pm 1)$ $(0, \pm 1, \pm 1)$

Ⅲ：$(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$

Ⅳ：$(1, 0, 0)_{FS}$

Ⅴ：$(\pm y_0, \pm 1, 0,)(\pm 1, 0, \pm y_0)(0, \pm y_0, \pm 1)$ $(0<y_0<1)$

Ⅵ：$(1, x_1, x_2)_{FS}$ $(0<x_1<1,\ 0<x_2<1)$

Ⅶ：$(1, 1, x_3)_{FS}$ $(0<x_3<1)$

今以点组Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ为求积结点，构造C_3上32点五次边界型求积公式. 方法如下.

设结点组Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ对应的求积公式的权系数分别为a_1，a_2，a_3. 我们的目标是构造五次求积公式，又由于结点组是由 5 次对称点组构成的，故只要建立对于单项式1，x^2，x^4，x^2y^2精确成立

的求积公式即可. 由此得到关于 a_1, a_2, a_3 和 x_0 的方程组

$$
\left\{
\begin{aligned}
12a_1 + 12a_2 + 8a_3 &= 8 \\
4(1 + x_0^2)a_1 + 8a_2 + 8a_3 &= 8/3 \\
4(1 + x_0^4)a_1 + 8a_2 + 8a_3 &= 8/5 \\
4x_0^2 a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 8/9
\end{aligned}
\right.
\tag{1.61}
$$

解方程组(1.61)得

$$
x_0 = \sqrt{\frac{3}{10}} \qquad a_1 = \frac{80}{63} \qquad a_2 = -\frac{52}{63} \qquad a_3 = \frac{1}{3}
$$

从而导出了 C_3 上的一个 32 点五次边界型求积公式

$$
\iint_{C_3} f(x, y, z)\, dx dy dz \approx \frac{1}{63}\left[80\sum_1^{12} f_{\mathrm{I}} - 52\sum_1^{12} f_{\mathrm{II}} + 21\sum_1^{8} f_{\mathrm{III}}\right]
\tag{1.62}
$$

其中 $\sum_1^n f_M (M = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})$ 表示函数 f 在第 M 组点上的值的和, n 表示该组点的个数. 而在点组 I 的坐标中 $x_0 = \sqrt{\frac{3}{10}}$.

类似地, 用点组 II, III 和 V 作为求积结点可以构造出如下32点五次边界型求积公式

$$
\iint_{C_3} f(x, y, z)\, dx dy dz \approx \frac{1}{63}\left[\sum_1^{12} f_{\mathrm{V}} - 52\sum_1^{12} f_{\mathrm{II}} + 21\sum_1^{8} f_{\mathrm{III}}\right]
\tag{1.63}
$$

其中, 在点组 V 的坐标中 $y_0 = \sqrt{\frac{3}{10}}$.

事实上, 我们能用上述的方法构造出无穷多个32点五次边界型求积公式. 这次我们选用点组 I, III, V 作为结点组. 并设对应的求积公式的权系数分别为 a_1, a_2, a_3. 仿照式(1.61)我们可建立如下的方程组

$$\begin{cases} 12a_1+8a_2+\qquad 12a_3=8 \\ 4(1+x_0^2)a_1+8a_2+4(1+y_0^2)a_3=8/3 \\ 4(1+x_0^4)a_1+8a_2+4(1+y_0^4)a_3=8/5 \\ 4x_0^2a_1+8a_2+\qquad 4y_0^2a_3=8/9 \end{cases} \qquad (1.64)$$

解方程组(1.64)得

$$x_0=\sqrt{\frac{\frac{8}{5}-y_0^2}{y_0^2+1}} \qquad a_1=\frac{4(1+y_0^2)}{9(y_0^2-x_0^2)} \qquad a_2=\frac{1}{3}$$

$$a_3=\frac{4(1+x_0^2)}{9(x_0^2-y_0^2)}$$

其中 y_0 是区间$(\sqrt{3/10},\ 1)$中不等于$\sqrt{\sqrt{13/5}-1}$的任意实数. 从而得到无穷多个具有如下形式的32点五次边界型求积公式：

$$\iint_{C_3} f(x,y,z)\,dxdydz\approx\frac{4(1+y_0^2)}{9(y_0^2-x_0^2)}\sum_1^{12}f_{\rm I}$$

$$+\frac{1}{3}\sum_1^{8}f_{\rm II}+\frac{4(1+x_0^2)}{9(x_0^2-y_0^2)}\sum_1^{12}f_{\rm V} \qquad (1.65)$$

其中$\sqrt{3/10}<y_0<1$，$y_0\neq\sqrt{\sqrt{13/5}-1}$，而
$x_0=\sqrt{(8/5-y_0^2)/(1+y_0^2)}$.

实际上，式(1.62)和(1.63)可以包含在公式(1.65)中，这只要我们把 y_0 的取值范围放宽为$[\sqrt{3/10},\ 1]$$(y_0\neq\sqrt{\sqrt{13/5}-1})$即可. 因为当$y_0=\sqrt{3/10}$时，式(1.65)中的 $x_0=1$，易知此时式(1.65)即是式(1.62)；当$y_0=1$时，$x_0=\sqrt{3/10}$，此时式(1.65)即是式(1.63).

如果仅限于用 5 次对称点组构造C_3上的5次边界型求积公式，则可以验明，无论怎样选择点组，总的结点个数不能少于32点. 事实上，我们可以分成几种情况考虑. 由于用5次对称点组的点作为求积结点，故各边界面上的结点个数是一样的. 当每个面上安排$k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$个结点时，我们从上述的 7 种类型的 5 次对称

点组中选择那样的点组作为求积结点组，使得每个边界面上恰好有k个点，且点组所含点的总个数少于32．通过逐一实验不难知道，如此选择的点组是不能用来构造5次求积公式的．$k\geqslant 10$的情形是勿需考虑的，因为此时不论怎样选择5次对称点组，求积结点总的个数都不少于32点．注意到凡是对称点组都是5次对称点组，于是我们可以建立如下的命题：

命题 1 在C_3上存在着无穷多个32点五次边界型求积公式，并且在对称五次边界型求积公式中结点个数不能少于32个．

不难用前述方法构造出如下的三次边界型求积公式：

$$\iint_{C_3} f(x,y,z)\,dxdydz \cong \frac{4}{3}\{f(1,0,0)+f(-1,0,0)$$
$$+f(0,-1,0)+f(0,1,0)+f(0,0,1)+f(0,0,-1)\} \tag{1.66}$$

顺便指出，公式(1.66)是C_3上最少点数三次边界型公式．

作为练习，建议读者自行构造如下的C_2上的最少点数三次边界型求积公式：

$$\iint_{C_2} f(x,y)\,dx\,dy \approx \frac{4}{3}\sum_1^4 f_{\mathrm{I}} - \frac{1}{3}\sum_1^4 f_{\mathrm{II}}$$

其中点组Ⅰ和Ⅱ的选择如下

$$\mathrm{I}:\ (0,1)_{FS} \qquad \mathrm{II}:\ (1,1)_{FS}$$

上述公式的代数精度是最高的，人们不能在C_2上造出具有4次代数精度的边界型公式．

现在考虑双层球壳域S_n^{shell}：

$$a^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant b^2$$

上的边界型求积公式．易知，此时最高代数精度也是3．事实上，当取

$$P(X)=P(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-a^2)\ (\sum_{i=1}^{n}x_i^2-b^2)$$

时，

$$\iint_{S_n^{shell}} P(X)dX<0$$

而若结点均在壳面上，则求积和总是零.

为了构造三次的边界型求积公式可选如下 $2(n+1)$ 点作为求积结点：

Ⅰ：$(\pm b,0,\cdots,0,0)$，$(0,\pm b,0,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,\pm b,0)$

Ⅱ：$(0,0,\cdots,0,\pm b)$

Ⅲ：$(0,0,\cdots,0,\pm a)$

通过解方程组，可得下列公式：

$$\iint_{S_n^{shell}} f(X)dX \cong A_1\sum_1^{2(n-1)} f_{\text{Ⅰ}} + A_2\sum_1^2 f_{\text{Ⅱ}} + A_3\sum_1^2 f_{\text{Ⅲ}} \tag{1.67}$$

$$A_1=A(b^2-a^2)(b^{n+2}-a^{n+2})$$

$$A_2=A(b^{n+4}+(n+1)a^{n+2}b^2-3b^{n+2}a^2-(n-1)a^{n+4})$$

$$A_3=Ab^2(2b^{n+2}-(n+2)a^nb^2+na^{n+2})$$

$$A=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2b^2\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)(n+2)(b^2-a^2)}$$

当 $n=2,3$ 时，分别得到圆环域上的 6 点三次边界型求积公式和双层球壳上的8点三次边界型公式：

$$\iint_{S_2^{shell}} f(x,y)dx\,dy \cong \frac{\pi(b^2-a^2)}{8b^2}\{(b^2+a^2)(f(b,0)+f(-b,0)$$

$$+2b^2(f(0,a)+f(0,-a))+(b^2-a^2)(f(0,b)+f(0,-b))\} \tag{1.68}$$

$$\iint_{S_3^{shell}} f(x,y,z)dx\,dy\,dz \cong \frac{2\pi}{15b^2(b^2-a^2)}\{(b^2-a^2)(b^5-a^5)$$

$$\times(f(b,0,0)+f(-b,0,0)+f(0,b,0)+f(0,-b,0))$$

$$+b^2(2b^5-5a^3b^2+3a^5)(f(0,0,a)+(f(0,0,-a))$$

$$+ (b^7 - 3b^5a^2 + 4a^5b^2 - 2a^7)(f(0,0,b) + f(0,0,-b))\}$$

(1.69)

在式(1.67)中，令$a \to 0$，可得到n维球域S_n上的一个三次求积公式：

$$\iint_{S_n} f(X)\, dX \cong \frac{\pi^{\frac{n}{2}}\, b^n}{2(n+2)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \left(\sum_1^{2(n-1)} f_{\mathrm{I}} + \sum_1^2 f_{\mathbf{II}} + 4f_0\right)$$

(1.70)

此处f_0表示函数$f(X)$在原点$(0,0,\cdots,0)$处的值.

命题 2 n维双层球壳域S_n^{shell}上的三次边界型求积公式的结点个数不能少于$2(n+1)$. 特别，双层球壳域S_n^{shell}上的三次边界型求积公式的结点个数不能少于8；圆环域上不能少于6.

下面，我们再不加证明地开列出几个带有一阶微商项的边界型求积公式.如所知，方域$C_2(|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1)$，立方域$C_3(|x|\leqslant 1,\ |y|\leqslant 1,\ |z|\leqslant 1)$和球域$S_n(x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2)$上的不带有微商项的边界型求积公式的代数精度的先天界限分别为3次，5次和1次.我们将给出在此诸域上分别具有5次，7次以及3次代数精度的一些带有一阶微商项的边界型求积公式.

C_2上5次边界型求积公式：

$$\iint_{C_2} f(x, y)\,dx\,dy \approx -\frac{1}{15}\sum_1^4 f_{\mathrm{I}} + \frac{16}{15}\sum_1^4 f_{\mathbf{II}}$$

$$+\frac{2}{45}[f_x'(1,1) - f_x'(-1,-1) + f_x'(1,-1) - f_x'(-1,1)$$

$$+f_y'(1,1) - f_y'(-1,-1) + f_y'(-1,1) - f_y'(1,-1)]$$

$$-\frac{2}{9}[f_x'(1,0) - f_x'(-1,0) + f_y'(0,1) - f_y'(0,-1)]$$

(1.71)

C_3上7次边界型求积公式

$$
\begin{aligned}
\iint_{C_3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \approx\ & a_1\sum_1^8 f_{\mathrm{I}} + a_2\sum_1^6 f_{\mathrm{II}} + a_3\sum_1^{24} f_{\mathrm{III}} \\
& + a_4\sum_1^{12} f_{\mathrm{IV}} + a_5[f'_x(1,1,1) - f'_x(-1,-1,-1) \\
& + f'_x(1,1,-1) - f'_x(-1,-1,1) + f'_x(1,-1,-1) \\
& - f'_x(-1,1,1) + f'_x(1,-1,1) - f'_x(-1,1,-1) \\
& + f'_y(-1,1,-1) - f'_y(1,-1,1) + f'_y(-1,1,1) \\
& - f'_y(1,-1,-1) + f'_y(1,1,-1) - f'_y(-1,-1,1) \\
& + f'_y(1,1,1) - f'_y(-1,-1,-1) + f'_z(-1,1,1) \\
& - f'_z(1,-1,-1) + f'_z(1,-1,1) - f'_z(-1,1,-1) \\
& + f'_z(1,1,1) - f'_z(-1,-1,-1) + f'_z(-1,-1,1) \\
& - f'_z(1,1,-1)] + a_6[f'_x(1,0,0) - f'_x(-1,0,0) \\
& + f'_y(0,1,0) - f'_y(0,-1,0) + f'_z(0,0,1) \\
& - f'_z(0,0,-1)] + a_7[f'_x(1,1,0) - f'_x(-1,-1,0) \\
& + f'_x(1,-1,0) - f'_x(-1,1,0) + f'_x(1,0,1) \\
& - f'_x(-1,0,-1) + f'_x(1,0,-1) - f'_x(-1,0,1) \\
& + f'_y(0,1,1) - f'_y(0,-1,-1) + f'_y(0,1,-1) \\
& - f'_y(0,-1,1) + f'_y(1,1,0) - f'_y(-1,-1,0) \\
& + f'_y(-1,1,0) - f'_y(1,-1,0) + f'_z(1,0,1) \\
& - f'_z(-1,0,-1) + f'_z(-1,0,1) - f'_z(1,0,-1) \\
& + f'_z(0,1,1) - f'_z(0,-1,-1) + f'_z(0,-1,1) \\
& - f'_z(0,1,-1)]
\end{aligned} \tag{1.72}
$$

其中

$a_1=1/5$，$a_2=-432/2835$，$a_3=512/945$，$a_4=-448/945$

$a_5=-11/405$，$a_6=-16/81$，$a_7=172/2835$

S_n上3次求积公式

$$
\iint_{S_n} f(X)\,dX \approx \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{2n\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\left[\sum_1^{2n} f_{\mathrm{I}} - \frac{R}{n+2}(f'_{x1}(R,0,\cdots,0)\right.
$$

$$-f'_{x_1}(-R,0,\cdots,0)+\cdots+f'_{x_n}(0,\cdots,0,R)-f'_{x_n}(0,\cdots,0,-R)] \tag{1.73}$$

§13. 小　结

作为结束，我们将从以下几个方面对代数方法予以评述：

1. 对求积公式的要求与选择

显然，人们都希望所使用的求积公式有较高的精度，即它有较小的求积误差．“小”的含义依赖于所考虑的问题．在两个含有同样计算量的求积公式中间，当然误差小的一个是好的．但是，由于我们还不知道误差，甚至不能较精确地估计它，因此比较公式的好与坏是很困难的．

在选用一个求积公式之前，应该想方设法对它的求积误差有所估计．一般说来，为此人们必须对被积函数和它的微商掌握一定的信息．

通常，全部求积结点是区域R_n的内点，求积系数为正的求积公式被认为是好的，并且可以指望它们有较小的求积误差．

求积系数有正有负，并且系数绝对值较

$$\mathrm{I}\,(1)=\int_{R_n}\cdots\int W(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,dx_1dx_2\cdots dx_n$$

为大的求积公式是不好的，不宜选用的．理由是，因为

$$\sum_{i=1}^{N}B_i=\mathrm{I}\,(1)$$

所以若

$$\sum_{i=1}^{N}|B_i|\gg\mathrm{I}\,(1)$$

则将导至大的舍入误差．

求积公式的结点是允许选为积分区域的外点的，这只要被积函数在那些点有定义就可以了．

对于低维区域(例如 $n=2,3$)来说，选用一个合适的求积公式是不困难的，可以选用乘积型公式或其它的用代数方法构造的求积公式. 对于常见的近20种积分区域在 A.H.Strout 的书[82]中备有大量的、具有各种代数精度的求积公式供选用. 对于高维积分的情形，例如，$n=100$，我们不能选用乘积型求积公式，因为此时求积公式最少包含$2^{100}\cong 10^{30}$个结点，也不宜于选用其它的用代数方法构造的求积公式. 对于这种情形，我们建议使用 Monte Carlo 方法或数论方法.

2. 非标准区域上的求积方法

我们假定R_n是可以剖分的. 如果R_n是由超平面限定的，则它常常能被剖分成 n 维单纯形. 当 $n=2$ 时，对任何由直线围成的区域能够进行三角剖分. 在一些情形下，R_n能够被剖分成 n 维方域或n维方域与 n 维单纯形的组合.

如果R_n的边界不是超平面，则它不能为n维方体或n维单纯形填满. 对于这种情形，至少还可以利用 Riemann 和估值积分. 例如，令$n=2$，R_2如图1.2所示. 我们可以用矩形剖分将R_2分成小的矩形区域. $f(x,y)$在R_2上的二重积分可以近似地表为

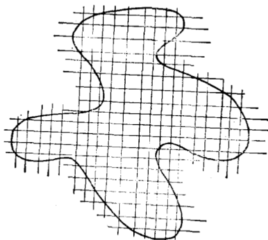


图 1.2

$$\sum_{i=1}^{N} B_i f(x_i, y_i)$$

其中 (x_i, y_i)，$i=1, 2, \cdots, N$，是含在 R_2 内部的小矩形的中心，B_i 是含 (x_i, y_i) 的小矩形的面积. 对于含边界的非矩形子域怎样处理呢？一般说来，我们可以将中心在 R_2 内的小曲边矩形计入求积和，将中心在 R_2 外的舍去.

还有一个方法是，如果可能的话，将高维积分化成累次积分. 例如，当积分域为如下图所示的 $R_{2,1}$ 或 $R_{2,2}$ 时，则有

$$\iint_{R_{2,1}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\phi(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

$$\iint_{R_{2,2}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{\lambda(y)}^{\mu(y)} (x,y)\,dx\right] dy$$

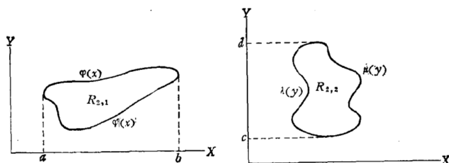


图 1.3

为了近似估值右端的累次积分，我们可以选择一个变量的求积公式：

$$\int_a^b g(x)\,dx \cong \sum_{i=1}^{M_1} A_i^1 g(\nu_i)$$

$$a \leqslant \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_{M_1} \leqslant b$$

选择另外的求积公式

$$\int_{\varphi(\nu_i)}^{\phi(\nu_i)} f(\nu_i, y)\,dy \cong \sum_{i=1}^{M_2} A_{ij}^2 f(\nu_i, \xi_{ij})$$

逼近上述的M_1个积分. 一般说来，对于不同的i应选不同的公式；允许的话，也可以公用一个求积公式. 最终，我们得到

$$\int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{M_1} A_i^1 \sum_{j=1}^{M_2} A_{ij}^2\, f(\nu_i, \xi_{ij})$$

上述方法可用于处理任意维数(例如，$n\geqslant 3$)的类似积分.

3. 未解决的问题

对于给定的区域和权函数来说，涉及到求积公式的存在性与结构的许多问题还未得到很好解决.

Tchakaloff首先证明了正系数求积公式（全部结点为求积区域的内点，并且结点个数不超过$N=C_n^{n+d}\equiv(n+d)!/n!d!$）的存在(见本章§2). Davis首先给出了一个构造这样公式的方法. 实际上，Davis构造性地证明了Tchakaloff定理（见本章§3). 最初，Davis的方法是针对$W(x,y)\equiv 1$的情形给出的，以后经他本人和Wilson等人推广到任意权函数$W(x,y)$的情形. 尽管如此,我们认为应该提到的主要问题仍是求积公式的构造问题.

问题 1 给定积分区域，权函数，整数$d>3$. 寻求一个构造d次求积公式的有效程序.

问题 2 对于给定的R_n, $W(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和$d>2$，寻求最少点数的d次求积公式.

以上两个问题，对于$d\leqslant 3$的情形，还容易解决. 一般情形就较困难了. 特别，对于$d\geqslant 3$，$n>2$，最少点数是依赖积分区域的. 有时，最少点数求积公式的结点不全是内点；有时，求积系数不全是正的；有时，两者都不能保证.

问题 3 对于给定的$R_n, W(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和$d>2$，寻求结点为内点的、正系数的最少点数求积公式.

显然，对于较小的d(例如，$4\leqslant d\leqslant 7$)和常见的主要区域，解决以上三个问题是有很大实际价值和意义的.

问题 4 对于n维方域、n维球域或n维单纯形域、寻求$O(n^2)$

或 $O(n^3)$(对于全体大的n)个内点的、五次的正系数求积公式.

问题 5 对于非周期函数的高维积分，构造具有较高逼近阶的单和逼近多重积分.

4. 最少点数公式

现在，我们将全部已知的最少点数求积公式开列如下：

(i) $(n+1)$点二次求积公式是最少点数求积公式.

(ii) T_n 上的$(n+2)$点三次求积公式是最少点数求积公式.

(iii) C_n和S_n上的三次求积公式的最少点数是$2n$.

(iv) 轴对称域上的 $2n$ 点三次求积公式是最少点数的求积公式.

(v) 对于$n\geqslant 2$，Fritsch[78] 给出一个n维区域的例子，对于这个区域来说，存在$(n+1)$点三次求积公式. Fritsch的公式是最少点数求积公式.

以上是仅知的$n\geqslant 2$ 时的最少点数求积公式.

对于 $n=2$ 的情形是

(vi) S_2，$E_2^{r^2}$，E_2^r 上的 6 点四次公式是最少点数求积公式.

(vii) Radon的 7 点五次求积公式是最少点数求积公式.

以下公式很象是最少点数求积公式，但是至今还没有得到证明.

(viii) C_2，S_2，$E_2^{r^2}$，E_2^r上的12点七次求积公式.

(ix) C_3，S_3，G_3，$E_3^{r^2}$，E_3^r上的13点五次求积公式.

(x) C_3，S_3，$E_3^{r^2}$，E_3^r上的27点七次求积公式.

本段所列各公式均请参见附录Ⅰ. 在附录Ⅱ中打上*号的各公式即为情形 viii，ix，x.

第二章　多重积分与激烈振荡函数积分的一个逼近方法

§1．方法的思想来源

1947年，物理学家A.Maréchal为了研究光的分布问题，曾设计了一种机械积分仪．他的想法是这样：令C：$r=a\theta$（采用极坐标系）是一条容纳于圆域$K(0\leqslant r\leqslant R)$内的Archimedes螺旋线；又令$f(r,\theta)$是一个连续函数，对$\theta$具有$2\pi$周期，则当正数$a$充分接近于0时，沿着$C$的线积分$2\pi a\int_C f(r,\theta)\,ds$便充分接近圆域上的重积分

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

这个想法的直观根据是：当a逐渐逼近于0时，则螺旋线的各圈在圆域K内的分布也就越来越密，而$2\pi a$恰好是相邻二圈的距离．由于被积函数的连续性，我们可以将相邻二圈近似地看作以2π为宽度的环形域，于是

$$2\pi a\int_C f(r,\theta)\,ds$$

便近似地代表f在各个圆环域上的积分之和；也就是说，它代表着在整个圆域K上的重积分的近似值：

$$2\pi a\int_C f(r,\theta)\,ds\approx\iint_K f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

J.E.Wilkins(1949)，E.Grosswald(1951)各自证明了

$$\lim_{a\to0+}2\pi a\int_C f(r,\theta)\,ds=\int_0^{2\pi}\int_0^R f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta \qquad (2.1)$$

现在，我们来给出 Wilkins 的证法．由于存在着弧微分公式 $ds=(r^2+r_\theta'^2)^{\frac{1}{2}}d\theta$，故式(2.1)可以写成

$$\lim_{a\to 0+}2\pi\int_0^R f(r,r/a)\ (a^2+r^2)^{\frac{1}{2}}d\cdot=\int_0^{2\pi}\int_0^R f(r,\theta)rdrd\theta$$

令M表连续函数$f(r,\theta)$在圆域上的最大值，则

$$\left|\int_0^R f(r,r/a)\ (a^2+r^2)^{\frac{1}{2}}dr-\int_0^R f(r,\ r/a)\ rdr\right|$$

$$\leqslant M\int_0^R\{(a^2+r^2)^{\frac{1}{2}}-r\}dr\longrightarrow 0\qquad(a\to 0+)$$

因此，我们所要证明的也就是

$$\lim_{a\to 0+}2\pi\int_0^R f(r,r/a)rdr=\int_0^{2\pi}\int_0^R f(r,\theta)rdrd\theta\qquad(2.1)'$$

现在，让我们来应用有关Fourier级数求和法的Fejér定理．令

$$S_n(r,\theta)=\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi\{f(r,\theta+u)+f(r,\theta-u)\}\frac{\sin^2(nu/2)}{\sin^2(u/2)}du$$

$$A_{kn}(r)=\frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\int_0^{2\pi}f(r,\theta)(\cos k\theta-i\sin k\theta)d\theta$$

则 Fejér 多项式可记作

$$S_n(r,\theta)=\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}A_{kn}(r)\cdot(\cos k\theta+i\sin k\theta)$$

依Fejér定理，在圆域$0\leqslant r\leqslant R$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$上于$n\to\infty$时$S_n(r,\theta)$一致收敛于$f(r,\theta)$．因此对于任给的$\varepsilon>0$，总可选$n$充分大以至

$$|S_n(r,\theta)-f(r,\theta)|<\frac{\varepsilon}{2\pi R^2}$$

从而得

$$\left|2\pi\int_0^R f(r,r/a)rdr-2\pi\int_0^R S_n(r,\ r/a)r\,dr\right|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(2.2)$$

另一方面，我们有

$$\left|\int_0^R S_n(r,r/a)r\,dr-\int_0^R A_{on}(r)rdr\right|$$
$$\leqslant\sum_{|k|=1}^{n-1}\left|\int_0^R A_{kn}(r)\,r\left(\cos\frac{kr}{a}+i\,\sin\frac{kr}{a}\right)dr\right|$$

由熟知的 Riemann-Lebesgue 定理，可知于$a\to0+$时上式的右端趋于零. 因此，令a充分小时可使

$$\left|2\pi\int_0^R S_n(r,r/a)\,rdr-2\pi\int_0^R A_{on}(r)r\,dr\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (2.3)$$

注意由$A_{on}(r)$的定义可知

$$2\pi\int_0^R A_{on}(r)rdr=\int_0^{2\pi}\int_0^R f(r,\theta)rdrd\theta$$

因此将不等式(2.2)和(2.3)合并，便得到

$$\left|2\pi\int_0^R f(r,r/a)rdr-\int_0^{2\pi}\int_0^R f(r,\theta)r\,dr\,d\theta\right|<\varepsilon$$

这隐含了要推证的等式(2.1).

公式(2.1)的意义显然在于表明圆域上的重积分可通过线积分的极限来表示. 把这个想法加以发展，也就自然使我们想到有可能将任意一个展布在$2k$维球域(或立方域)上的$2k$重积分通过k重积分的极限来表现. 这一想法果然能够被证明是正确的，并且还可以进一步求出$2k$重积分与k重积分间的逼近差. 这就是下面我们所要论证的一个基本引理——它成为多重积分的一个新的逼近方法的基础.

§2. 基本引理

对于定义在n维区域D上的连续函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，我们常用$\omega(f)$去表示它的连续模数，即

$$\omega(f;\ \delta_1,\cdots,\delta_n)=\max_{|x_i-x_i'|\leqslant\delta_i}|f(x_1,\cdots,x_n)-f(x_1',\cdots,x_n')|$$

又V_n常用以代表n维的立方域$0\leqslant x_1\leqslant1,\ \cdots,0\leqslant x_n\leqslant1$. 为了简便，

有时用一个x代表一组变量$x_1,\cdots,x_n$；又以$\langle Nx\rangle$代表一组变量$\langle N_1x_1\rangle,\cdots,\langle N_nx_n\rangle$，其中$\langle x\rangle$恒表非负实数$x$的分数部分，亦即$\langle x\rangle=x-[x]$.

令$C(V_n\times V_n)$表示$V_n\times V_n$上的全体$2n$元连续函数$f(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)$.现在研究积分

$$I=\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\cdots,x_n;\ y_1,\cdots,y_n)dx_1\cdots dx_n dy_1\cdots dy_n$$

的估值问题. 记

$$\rho_{N_1\cdots N_n}(f)=I_{N_1\cdots N_n}(f)-I$$

其中

$$I_{N_1\cdots N_n}(f)=\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\cdots,x_n;\ \langle N_1x_1\rangle,\cdots,\langle N_nx_n\rangle)dx_1\cdots dx_n$$

引理 1 对于任意的$f\in C$和正整数$N_i\geqslant 2(i=1,\cdots,n)$成立着不等式

$$|\rho_{N_1\cdots N_n}(f)|\leqslant 2^n\int_0^1\cdots\int_0^1\omega\left(f;\frac{t_1}{N_1},\cdots,\frac{t_n}{N_n}\right)\prod_{i=1}^n(1-t_i)dt_1\cdots dt_n \tag{2.4}$$

此外，有非平凡的$2n$元函数$f_0\in C$使得上面不等式中的等号成立.

证 经适当变换可得

$$\rho_{N_1\cdots N_n}(f)=\left(\prod_{i=1}^n N_i\right)^{-1}\int_0^{N_1}\cdots\int_0^{N_n}f\left(\frac{y_1}{N_1},\cdots,\frac{y_n}{N_n};\right.$$

$$\left.\langle y_1\rangle,\cdots,\langle y_n\rangle\right)dy_1\cdots dy_n$$

$$-\int_0^1\cdots\int_0^1\left[\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\cdots\right.$$

$$\sum_{k_n=0}^{N_n-1}\int_{\frac{k_1}{N_1}}^{\frac{k_1+1}{N_1}}\cdots\int_{\frac{k_n}{N_n}}^{\frac{k_n+1}{N_n}}f(x_1,\cdots,x_n;\ y_1,\cdots,y_n)\times$$

$$\times dx_1\cdots dx_n\Big]dy_1\cdots dy_n$$

$$=\left(\prod_{j=1}^{n}N_j\right)^{-1}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\cdots\sum_{k_n=0}^{N_n-1}\int_0^1\cdots\int_0^1\Big[f\left(\frac{y_1+k_1}{N_1},\right.$$

$$\left.\cdots,\ \frac{y_n+k_n}{N_n};\ y_1,\cdots,y_n\right)-\int_0^1\cdots\int_0^1 f\left(\frac{t_1+k_1}{N_1},\right.$$

$$\left.\cdots,\ \frac{t_n+k_n}{N_n};\ y_1,\cdots,y_n\right)dt_1\cdots dt_n\Big]dy_1\cdots dy_n, \tag{2.5}$$

从而可得

$$|\rho_{N_1\cdots N_n}(f)|\leqslant 2^n\int_0^1\cdots\int_0^1\omega\left(f;\ \frac{t_1}{N_1},\ \cdots,\ \frac{t_n}{N_n}\right)$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}(1-t_j)dt_1\cdots dt_n$$

现在我们来构造使等号成立的函数f_0，记

$$g_{k,j}(x,y)=x+\frac{2k}{N_j}y-\frac{2k}{N_j}$$

$$h_{k,j}(x,y)=-x+\frac{2k+2}{N_j}y$$

作函数

$$\varphi_j(x,y)=\begin{cases}g_{k,j}(x,y),\text{若}\dfrac{k}{N_j}\leqslant x\leqslant\dfrac{k+1}{N_j},\ N_jx-k\leqslant y\leqslant 1\\ h_{k,j}(x,y),\text{若}\dfrac{k}{N_j}\leqslant x\leqslant\dfrac{k+1}{N_j},\ 0\leqslant y\leqslant N_jx-k\end{cases}$$

$$k=0,1,\cdots,N_j-1$$

设

$$f_0(x_1,\cdots,x_n;\ y_1,\cdots,y_n)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x_j,y_j)$$

那么$f_0\in C$，并且$\omega(f_0;\ t_1,\cdots,t_n)=t_1+\cdots+t_n$. 把它代入(2.4)式

的右边，得

$$2^n\int_0^1\cdots\int_0^1 \omega\left(f_0;\frac{t_1}{N_1},\cdots,\frac{t_n}{N_n}\right)\prod_{j=1}^n(1-t_j)dt_1\cdots dt_n$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^n\frac{1}{N_j}$$

利用(2.5)可以求出，$\rho_{N_1\cdots N_n}(f_0)$也有相同的值．因此式(2.4)中等号成立．证毕．

引理 2 对于任意的正整数$N_1,\cdots,N_n$，

$$\delta_{N_1\cdots N_n}=\sup_{\omega(f;\frac{1}{N_1},\cdots,\frac{1}{N_n})\neq 0}\frac{|\rho_{N_1\cdots N_n}(f)|}{\omega\left(f;\frac{1}{N_1},\cdots,\frac{1}{N_n}\right)}=1$$

成立．

事实上，由(2.4)立即可导出$\delta_{N_1\cdots N_n}\leqslant 1$．现在设$g_j(x)$是$(-\infty,\infty)$上周期为$\frac{1}{N_j}$的连续函数，它在$\left[0,\frac{1}{N_j}\right]$上定义如下：

$$g_j(x)=\begin{cases}x^{\alpha} & \text{若 } 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2N_j}\\ \left(\frac{1}{N_j}-x\right)^{\alpha} & \text{若 }\frac{1}{2N_j}\leqslant x\leqslant\frac{1}{N_j}\end{cases}$$

其中$0<\alpha<1$．作函数

$$f_0(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)=\sum_{j=1}^n g_j\left(x_j-\frac{y_j}{N_j}\right)$$

那么$f_0\in C$．对于该函数有

$$\frac{|\rho_{N_1\cdots N_n}(f_0)|}{\omega\left(f_0;\frac{1}{N_1},\cdots,\frac{1}{N_n}\right)}=\frac{\frac{1}{(\alpha+1)2^{\alpha}}\sum_{j=1}^n\frac{1}{N_j^{\alpha}}}{\sum_{j=1}^n\frac{1}{(2N_j)^{\alpha}}}=\frac{1}{\alpha+1}$$

因为α可以任意接近零，于是$\delta_{N_1\cdots N_n}\geqslant 1$．证毕．

由引理1和引理2立得下面的

基本引理 对于任意的$f\in C$和正整数$N_i\geqslant 2 \quad (i=1,\cdots,n)$成立着不等式

$$|\rho_{N_1\cdots N_n}(f)|\leqslant\omega\left(f;\ \frac{1}{N_1},\cdots,\frac{1}{N_n}\right) \qquad (2.6)$$

设$\omega(t_1,\ \cdots,\ t_n)$是给定的$n$元连续模函数，以$H^\omega$表$C$中适合$\omega(f;\ t_1,\cdots,t_n)\leqslant\omega(t_1,\cdots,t_n)$的函数$f$全体所成的子集．我们研究量

$$\mathscr{E}_{N_1\cdots N_n}(H^\omega)=\sup_{f\in H^\omega}|\rho_{N_1\cdots N_n}(f)|$$

的性质．对于$\omega(t_1,\cdots,t_n)=t_1+\cdots+t_n$的情形，简记$H^\omega=H'$．此时，根据引理1的证明，显然成立着下述精确等式

$$\mathscr{E}_{N_1\cdots N_n}(H')=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{N_j}$$

对于一般情形，我们有下面的

定理 1 设$N_1,\cdots N_n$为正整数，$\omega(t_1,\cdots,t_n)$为给定的连续模，则成立着渐近式

$$\mathscr{E}_{N_1\cdots N_n}(H^\omega)=2^n\int_0^{\frac{1}{2}}\cdots\int_0^{\frac{1}{2}}\omega\left(\frac{t_1}{N_1},\cdots,\frac{t_n}{N_n}\right)dt_1\cdots dt_n + O\left(\frac{1}{N_1}+\cdots+\frac{1}{N_n}\right) \qquad (2.7)$$

并且O仅与ω有关．

证 设$f\in H^\omega$，则有

$$\rho_{N_1\cdots N_n}(f)=\int_0^1\cdots\int_0^1\left[\left(\prod_{j=1}^{n}N_j\right)^{-1}\sum_{k_1=1}^{N_1-2}\cdots\sum_{k_n=1}^{N_n-2}f\left(\frac{y_1+k_1}{N_1},\cdots,\frac{y_n+k_n}{N_n};\ y_1,\cdots,y_n\right)\right.$$

$$-\sum_{k_1=1}^{N_1-2}\cdots\sum_{k_n=1}^{N_n-2}\int_{\frac{y_1+k_1-\frac{1}{2}}{N_1}}^{\frac{y_1+k_1+\frac{1}{2}}{N_1}}$$

$$\cdots\int_{\frac{y_n+k_n-\frac{1}{2}}{N_n}}^{\frac{y_n+k_n+\frac{1}{2}}{N_n}} f(x_1,\cdots,x_n;\ y_1,\cdots,y_n)\,dx_1\cdots$$

$$dx_n\Big]dy_1\cdots dy_n+O\left(\frac{1}{N_1}+\cdots+\frac{1}{N_n}\right)$$

而O仅与ω有关. 从而

$$|\rho_{N_1\cdots N_n}(f)|\leqslant 2^n\int_0^{\frac{1}{2}}\cdots\int_0^{\frac{1}{2}}\omega\left(\frac{t_1}{N_1},\cdots,\frac{t_n}{N_n}\right)dt_1\cdots dt_n$$

$$+O\left(\frac{1}{N_1}+\cdots+\frac{1}{N_n}\right)$$

所以式(2.7)的右端≥左端.

现在证明式(2.7)的右端≤左端. 设$g(x_1,\cdots,x_n)$是n元周期连续函数. 对于变量x_j, 它的周期是$\frac{1}{N_j}$, 在$\left[0,\frac{1}{N_1}\right]\times\left[0,\frac{1}{N_2}\right]\times\cdots\times\left[0,\frac{1}{N_n}\right]$上$g$的定义如下:

$$g(\cdots,x_j,\ \cdots)=\begin{cases}\omega(\cdots,\ x_j,\cdots) & x_j\in\left[0,\frac{1}{2N_j}\right]\\ \omega\left(\cdots,\frac{1}{N_j}-x_j,\ \cdots\right) & x_j\in\left[\frac{1}{2N_j},\ \frac{1}{N_j}\right]\end{cases}$$

$$j=1,\ \cdots,\ n$$

置

$$f_0(x_1,\cdots,x_n;\ y_1,\cdots,y_n)=g\left(x_1-\frac{y_1}{N_1},\cdots,\ x_n-\frac{y_n}{N_n}\right)$$

那么$f_0\in C$，并且不难见到$f_0\in H^\omega$. 对于它有

$$|\rho_{N_1\cdots N_n}(f)|=2^n\int_0^{\frac{1}{2}}\cdots\int_0^{\frac{1}{2}}\omega\left(\frac{t_1}{N_1},\cdots,\frac{t_n}{N_n}\right)dt_1\cdots dt_n$$

由是可见，式(2.7)的右端≤左端. 证毕.

推论 1 设$f(x,y)$是定义在方域$0\leqslant x,y\leqslant 1$上的任意一个二元连续函数，则

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^1 f(x,\langle Nx\rangle)\,dx=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy \qquad (2.8)$$

推论 2 设$f(x,y)$满足 Lipschitz 条件

$$|f(x,y)-f(x',y)|\leqslant A|x-x'| \qquad 0\leqslant x\leqslant x'\leqslant 1$$

其中A是一个与$y(0\leqslant y\leqslant 1)$无关的绝对常数，则对一切整数$N\geqslant 2$有

$$\left|\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy-\int_0^1 f(x,\langle Nx\rangle)\,dx\right|\leqslant\frac{A}{N} \qquad (2.9)$$

推论 3 (Marechal-Wilkins定理的改进). 设$g(r,\theta)$是定义在圆域$S(0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$上的任一连续函数，且是$\theta$的$2\pi$周期函数，$(r,\theta)$表极坐标. 又记

$$\omega_g(\delta,\delta')=\max_S|g(r,\theta)-g(r',\theta')|,\quad |r-r'|\leqslant\delta,$$

$$|\theta-\theta'|\leqslant\delta'$$

则对一切整数$N\geqslant 2$有

$$\left|\iint_S g(r,\ \theta)\,dS-2\pi\int_0^R g\left(r,\ \frac{2N\pi r}{R}\right)rdr\right|$$

$$\leqslant 2\pi R^2\left\{(R+1)\omega\left(g;\ \frac{1}{N},\ 0\right)+M_g\cdot\frac{1}{N}\right\} \qquad (2.10)$$

其中$M_g=\max\limits_S|g(r,\theta)|$.

作变量替换：

$$r_1=\frac{1}{R}r \qquad \theta_1=\frac{1}{2\pi}\theta \qquad g(Rr_1, 2\pi\theta_1)r_1=f(r_1,\theta_1)$$

如是函数$f(r_1,\theta_1)$对θ_1而言便具有周期1，并且立即得出

$$\iint_S g(r,\ \theta)dS=2\pi R^2\int_0^1\int_0^1 (r_1,\theta_1)dr_1d\theta_1 \qquad (2.11)$$

$$2\pi\int_0^R g\left(r, 2N\pi\frac{r}{R}\right)rdr=2\pi R^2\int_0^1 f(r_1, Nr_1)dr_1$$

$$=2\pi R^2\int_0^1 f(r_1, \langle Nr_1\rangle)dr_1 \qquad (2.12)$$

记平面区域 $0\leqslant x\leqslant 1$， $0\leqslant y\leqslant 2\pi$ 为 Δ，则容易得出

$$\left(|x-x'|\leqslant\frac{1}{N}\right)$$

$$\omega\left(f;\ \frac{1}{N},\ 0\right)=\max_{\Delta}|g(Rx,y)x-g(Rx',y)x'|$$

$$\leqslant\max_{\Delta}|g(Rx,y)x-g(Rx',y)|x+\max_{\Delta}|g(Rx',y)||x-x'|$$

$$\leqslant\omega\left(g;\ \frac{R}{N},\ 0\right)+M_g|x-x'|$$

$$\leqslant(R+1)\omega\left(g;\ \frac{1}{N},\ 0\right)+M_g\frac{1}{N}$$

因此根据式(2.11)和(2.12)，利用基本引理便得到式(2.10).

如将式(2.10)的左端与式(2.1)′左右两端作一比较，可知推论 3 乃是Maréchal—Wilkins定理的一个精确化.

不难看出，就$n=1$的情形而言，只需在基本引理的证明中取$\Delta x=\Delta x_1=\frac{1}{N}(\beta-\alpha)$，等等，便可以得到

$$\lim_{N\to\infty}\int_\alpha^\beta f(x, \langle Nx\rangle)dx=\int_\alpha^\beta dx\int_0^1 f(x,y)dy \qquad (2.13)$$

此处$f(x,y)$是假定在$\alpha<x<\beta$，$0\leqslant y\leqslant 1$上连续的一个函数.

借助于式(2.13)还可以得到如下的

推论 4 令$f(x,y,z)\in C(D_3)$，D_3表单位立方体，则我们有

$$\lim_{\mu\to\infty}\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1 f(x,\ \langle\lambda x\rangle,\ \langle\mu x\rangle)\,dx=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x,y,z)\,dxdydz$$

其中$\lambda\to\infty$，$\mu\to\infty$系假定通过正整数序列.

从基本引理也可以推出这个推论. 取$k=2$，$N_1=N_2=\mu$，则依式(2.6)有

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\,dxdydzdu=\lim_{\mu\to\infty}\int_0^1\int_0^1 f(x,y,\langle\mu x\rangle)\,dxdy \tag{2.14}$$

我们知道$\varphi_\mu(x,y)=f(x,y,\langle\mu x\rangle)$是一个有界函数，而且在各个矩形域$\frac{\nu-1}{\mu}<x<\frac{\nu}{\mu}$，$0\leqslant y\leqslant 1\,(\nu=1,2,\cdots,\mu)$内显然是连续的. 因此应用式(2.13)我们有

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 f(x,\ y,\ \langle\mu x\rangle)\,dxdy&=\sum_{\nu=1}^{\mu}\int_{(\nu-1)/\mu}^{\nu/\mu}dx\int_0^1 f(x,y,\langle\mu x\rangle)\,dy\\&=\sum_{\nu=1}^{\mu}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{(\nu-1)/\mu}^{\nu/\mu} f(x,\langle\lambda x\rangle,\ \langle\mu x\rangle)\,dx\\&=\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1 f(x,\langle\lambda x\rangle,\langle\mu x\rangle)\,dx\end{aligned}$$

这就完成了式(2.14)的证明.

顺便指出式(2.8)中N与此处的λ，μ无需限定通过整数序列.

还值得指出的是，推论2中式(2.9)右端阶的估计$O\left(\frac{1}{N}\right)$已不能再改善. 事实上，若取$f(x,y)=xy$，则容易算出

$$\left|\int_0^1\int_0^1 xy\,dx\,dy-\int_0^1 x(Nx)\,dx\right|=\frac{1}{12N}\qquad N=2,3,\cdots$$

故恰好具有N^{-1}的阶(当$N\to\infty$时).

§3. 约化原则及其应用

一个展布在V_{2n-1}上的$2n-1$重积分显然总可以表示成区域V_{2n}上的 $2n$重积分，亦即

$$\iint_{V_{2n-1}} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=\iint_{V_{2n}} f(\mathbf{x})\,dx_1\cdots dx_{2n-1}dx_n$$

因此由§2中的基本引理，我们知道凡是区域V_n上的n重积分都无不可以近似地约化为$\left[\frac{n+1}{2}\right]$重的积分，而误差可以由被积函数的连续模数表出.

为了简单起见，我们假定从n重积分近似地约化成$\left[\frac{n+1}{2}\right]=k$重积分时，在新积分中被引进的$k$个大参数均相等，即 $N_1=N_2=\cdots=N_k$. 如此，每用基本引理约化一次，便需引进一个新参数，而且一个n重积分顶多只需连续约化 $[\log_2 n]+1$ 次便可以得到一个相应的单积分. 现在把这个原则明确地叙述如下：

令$F(x_1,\cdots,x_n)$$(n\geqslant 3)$是$V_n$上的一个连续函数，而对于变量$x_3,\cdots,x_n$而言各具有周期 1 . 令$S$为一正整数而使得$2^{S-1}<n\leqslant 2^S$，则经过$S$次约化便可将多重积分

$$\int_{V_n} F dx_1\cdots dx_n$$

约化成一个定积分$\int_0^1\psi(x_1)dx_1$，而具有一个误差项$\rho(N_1,\cdots,N_S)$. 此处$\rho(N_1,\cdots,N_S)\to 0$ $(N_i\to\infty)$；又$\psi(x_1)$乃是x_1的按段连续函数，其中包含着S个大参数$N_1,\cdots,N_S$. 更精确地说，我们能够得到

$$\iint_{V_n} F(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n=\int_0^1\psi(x_1)dx_1+\rho(N_1,\cdots,N_S)$$

此处$\psi(x_1)=F(x_1,y_1,\cdots,y_{n-1})$，而$(y_1,\cdots,y_{n-1})$乃是下列的$2^S-1$

个符号

$$(N_{\nu_1}(N_{\nu_2}(\cdots(N_{\nu_t}x_1)\cdots))) \qquad 1\leqslant\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_t\leqslant s$$
$$1\leqslant t\leqslant s$$

中取$(n-1)$个符号的一个排列.

不难看出，函数F关于诸变量x_3，…，x_n的周期性条件足以保证x_1的函数$\psi(x_1)=F(x_1,y_1,\cdots,y_{n-1})$在区间$0\leqslant x_1\leqslant 1$上是逐段连续的．为说明这个事实，以$n=4$为例即可；因为事实上推理原则完全适用于一般的情形．假设定义在V_4上的四元连续函数$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$具有性质$f(x_1,x_2,0,x_4)=f(x_1,x_2,1,x_4)$，$f(x_1,x_2,x_3,0)=f(x_1,x_2,x_3,1)$，则容易验证$\varphi(x_1,x_2)=f(x_1,x_2,\langle\lambda x_1\rangle,\langle\mu x_2\rangle)$乃是$(x_1,x_2)$的连续函数，而$\psi(x_1)=\varphi(x_1,\langle\nu x_1\rangle)=f(x_1\langle\nu x_1\rangle,\langle\lambda x_1\rangle,\langle\mu\langle\nu x\rangle\rangle)$至少是$x$的逐段连续函数，其中$\lambda$，$\mu$，$\nu$可以是任意正整数．此外，还不难看出，如果再进一步加设$f(x_1,0,x_3,x_4)=f(x_1,1,x_3,x_4)$，则此时$\psi(x)$就不只是按段连续，而成为连续．

从上面叙述的事实看来，可知为了使n元函数的n重积分能最后地约化成单积分（当然带有一个误差项），那么被积函数对于其中某$n-2$个变量具有周期1的条件也是必需的．事实上，就一般的情形而言，利用基本引理约化一次，新的被积函数就可能已经不连续（而只是逐段连续）；那就是说，可能在$x_i=\dfrac{\nu}{N_i}$ $(1\leqslant\nu\leqslant N_i-1)$等处不连续．所以，我们的普遍约化原则只能对于连续的多元周期函数的多重积分才能近似地约化到单积分为止．但是，若我们考虑的乃是展布在n维球域上的n重积分，则被积函数中的某$n-2$个变数具有周期2π的条件将并不成为实质性限制．因此就超越球域上的多重积分而言，我们的约化原则却显得有更大的普遍适用性．

从近似计算的观点来看，当我们用基本引理将2π重积分近似

地约化为n重积分时，为使所带来的误差较小，则对大参数N_1，…，N_n的选取也是需要讲究的．通常为了能比较容易地计算n重积分

$$\int_{V_n} f(\mathbf{x}, \langle N\mathbf{x}\rangle) dx_1 \cdots dx_n$$

起见，我们一方面希望诸N_i不要选得过分大，而另一方面又希望误差变动的范围——$2\omega\left(f; \frac{1}{N_1}, \cdots, \frac{1}{N_n}, 0, \cdots, 0\right)$尽可能地小．因此，我们自然有必要予先观测一下函数值$f(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n)$沿着各个$x_i$轴方向的变化快慢如何．假如沿着$x_i$轴函数值增减特别快，则就有必要把相应的$N_i$选得特别大一些．

应用上述的普遍约化原则，能将多重积分的近似计算问题约化为二重积分或单积分的近似计算问题．特别，若将约化原则应用于低维积分的情形上去，可以得到一些有趣的结果——也就是如下的一些命题：

定理 2 设$f(x,y,z)$是定义在D_3上的任一连续函数且具有性质$f(x,y,0)=f(x,y,1)$，则我们有如下的近似表达式

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f dx dy dz = \int_0^1 f(x, \langle \mu x\rangle, \langle \lambda x\rangle) dx + \rho(\lambda, \mu)$$

其中 $|\rho(\lambda, \mu)| \leqslant \omega\left(\varphi; \frac{1}{\mu}, 0\right) + \omega\left(f; \frac{1}{\lambda}, 0, 0\right)$，$\varphi = \varphi_\lambda = f(x, y, \langle \lambda x\rangle)$ 是 (x,y) 的一个连续函数；λ，μ 为不小于2的任意整数．

证 显然$f(x,y,\langle\lambda x\rangle)$是$(x,y)$的连续函数，$f(x, \langle \mu x\rangle, \langle xy\rangle)$是$x$的逐段连续函数．现将所考虑的三重积分表为四重积分：

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z) dx dy dz du$$

则连续两次应用基本引理，便获得了定理 2 的结论．证毕．

我们知道 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lim\limits_{\mu\to\infty}\rho(\lambda,\mu)=0$；因为

$$\lim_{\mu\to\infty}\omega\left(\varphi;\ \frac{1}{\mu},\ 0\right)=0 \qquad \lim_{\lambda\to\infty}\omega\left(f;\ \frac{1}{\lambda},\ 0,\ 0\right)=0$$

因此只要参数λ，μ足够大，便有

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\,dxdydz\approx\int_0^1 f(x,\langle\mu x\rangle,\langle\lambda x\rangle)\,dx$$

定理 3 设$f(x,y,z)dxdydz$是D_3上的连续函数而有性质$f(x,y,0)=f(x,y,1)$则对一切整数$N\geqslant 2$有

$$\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f\,dxdydz-\int_0^1 f(x,\langle N^2x\rangle,\langle Nx\rangle)\,dx\right|\leqslant 4\omega\left(f;\frac{1}{N},0,\frac{1}{N}\right)$$

证 首先，根据定理 2 有

$$\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f\,dxdydz-\int_0^1 f(x,\langle N^2x\rangle,\ \langle Nx\rangle)\,dx\right|$$
$$\leqslant\omega\left(f;\ \frac{1}{N},\ 0,\ 0\right)+\omega\left(\varphi;\ \frac{1}{N^2},\ 0\right) \qquad (2.15)$$

此处$\varphi=\varphi_N=f(x,y,\langle Nx\rangle)$．现在让我们来估计$\omega(\varphi;\ N^{-2},\ 0)$．为此我们取定这样一些闭区间$I_k=\left[\frac{k-1}{N},\ \frac{k}{N}\right]$，$(k=1,2,\cdots,N)$．

于是对于同属于某一区间I_k的二点x和x'，要是$|x-x'|\leqslant N^2$，则必$|\langle Nx'\rangle-\langle Nx\rangle|\leqslant N^{-1}$；从而

$$|f(x',y,\langle Nx'\rangle)-f(x,y,\ \langle Nx\rangle)|\leqslant\omega\left(f;\ \frac{1}{N^2},\ 0,\frac{1}{N}\right)$$

在另外的情形，我们总可以假定$x\in I_k$，$x'\in I_{k+1}$，$|x-x'|\leqslant N^{-2}$．如此，可以表$x=\frac{k}{N}-\varepsilon_1$，$x'=\frac{k}{N}+\varepsilon_2$（$\varepsilon_1\geqslant 0$，$\varepsilon_2\geqslant 0$，$\varepsilon_1+\varepsilon_2\leqslant N^{-2}$），并且不难得出

$$|f(x',y,\langle Nx'\rangle)-f(x,y,\langle Nx\rangle)|$$
$$\leqslant|f(x',y,\langle Nx'\rangle)-(x,y,\langle Nx'\rangle)|+|f(x,y,\langle Nx'\rangle)$$
$$-f(x,y,\langle Nx\rangle)|$$

$$\leqslant \omega\left(f; \frac{1}{N^2}, 0, 0\right) + |f(x,y,N\varepsilon_2) - f(x,y,1-N\varepsilon_1)|$$

$$\leqslant \omega\left(f; \frac{1}{N^2}, 0, 0\right) + |f(x,y,N\varepsilon_2) - f(x,y,0)|$$

$$+ |f(x,y,1) - f(x,y,1-N\varepsilon_1)|$$

$$\leqslant \omega\left(f; \frac{1}{N^2}, 0, 0\right) + 2\omega\left(f; 0, 0, \frac{1}{N}\right)$$

$$\leqslant 3\omega\left(f; \frac{1}{N}, 0, \frac{1}{N}\right)$$

这样，我们便有结论$\omega(\varphi; N^{-2}, 0) \leqslant 3\omega(f; N^{-1}, 0, N^{-1})$. 以此代入式(2.15)的右端，便得定理结论. 证毕.

显然定理 3 要比定理 2 更合于应用，因为定理 3 中的单积分只含有一个大参数，并且两个积分之间的逼近程度有着一个简单的估计$8\omega(f; N^{-1}, 0, N^{-1})$.

假定我们所考虑的三重积分是

$$J = \iiint_\sigma F(r, \varphi, \theta) d\sigma$$

此处$(r, \varphi, \theta,)$表球面坐标，$F(r, \varphi, \theta)$是定义在球域$\sigma(0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$上的连续函数.

显然，通过如下关系式

$$F(r, \varphi, \theta) = F(r, 2\pi - \varphi, \theta)$$

$$F(r, \varphi, \theta) = F(r, \varphi + 2k\pi, \theta) = F(r, \varphi, \theta + 2k\pi) \quad k = 1, 2, 3$$

我们恒可将连续函数$F(r, \varphi, \theta)$的定义范围扩展到$\sigma^*(0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant \varphi < \infty, 0 \leqslant \theta < \infty)$；这也就是说，$F$在保持连续性的要求下可以延拓为$\varphi$和$\theta$的$2\pi$周期函数. 于是可表

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R F(r, \varphi, \theta) r^2 |\sin\varphi| dr$$

$$= 2\pi^2 R^3 \int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x, y, z) dx dy dz$$

此处 $f(x,y,z)=F(Rx,2\pi z,2\pi y)x^2|\sin(2\pi z)|$，而 $f(x,y,z)$ 显然对y和z具有周期1.

现在为了能够利用定理 3，我们需要估计$\omega(f;N^{-1},0,N^{-1})$. 令 x,x',z,z' 均受制于条件$|x-x'|\leqslant N^{-1}$, $|z-z'|\leqslant N^{-1}$，则有如下的估计

$$\begin{aligned}
\omega(f;N^{-1},0,N^{-1})&=\max|F(Rx,2\pi z,2\pi y)x^2|\sin(2\pi z)|\\
&\quad -F(Rx',2\pi z',2\pi y)x'^2|\sin(2\pi z')||\\
&\leqslant\omega\left(F;\ \frac{R}{N},\ \frac{2\pi}{N},0\right)|x^2\sin(2\pi z)|\\
&\quad +M_F|x^2\sin(2\pi z)-x'^2\sin(2\pi z')|\\
&\leqslant\omega\left(F;\ \frac{R}{N},\ \frac{2\pi}{N},\ 0\right)+M_F|x^2-x'^2|\ |\sin(2\pi z)|\\
&\quad +M_F|x'|^2\cdot|\sin(2\pi z)-\sin(2\pi z')|\\
&\leqslant\omega\left(F;\ \frac{R}{N},\ \frac{2\pi}{N},\ 0\right)+2M_F\cdot\frac{1}{N}\\
&\quad +2M_F|\sin\pi(z-z')\cos\pi(z+z')|\\
&\leqslant\omega\left(F;\ \frac{R}{N},\ \frac{2\pi}{N},\ 0\right)+M_F\frac{1}{N}+2M_F\left|\sin\frac{\pi}{N}\right|\\
&\leqslant(R+1)(2\pi+1)\omega\left(F;\ \frac{1}{N},\ \frac{1}{N},\ 0\right)+(2+2\pi)M_F\frac{1}{N}
\end{aligned}$$

$$N\geqslant 2$$

类似地，若定义$g(x,y,z)=F(Rx,2\pi y,2\pi z)x^2|\sin(2\pi y)|$，同样不难证明

$$\begin{aligned}
\omega(g;N^{-1},0,N^{-1})&\leqslant(R+1)(2\pi+1)\omega(F;N^{-1},0,N^{-1})\\
&\quad +2M_F\frac{1}{N}
\end{aligned}$$

现在将定理应用于积分 I 便得到下列两个定理:

定理 4 设$F(r,\varphi,\theta)$是定义在球域$\sigma(0\leqslant r\leqslant R)$上的任一连

续函数，具有性质 $F(r,\varphi,\theta)=F(r,2\pi-\varphi,\theta)$，具对$\varphi$和$\theta$具有周期$2\pi$；则对于一切整数$N\geq 2$，我们有

$$\left|\frac{1}{2\pi^2R^3}\iiint_\sigma F(r,\varphi,\theta)\,d\sigma-\int_0^1 F(Rx,2\pi Nx,\ 2\pi N^2x)x^2\right.$$

$$\left.\times|\sin(2\pi Nx)|\,dx\right|$$

$$\leq 8\left\{(R+1)\left(\pi+\frac{1}{2}\right)\omega(F;N^{-1},N^{-1},0)+(\pi+1)M_F\frac{1}{N}\right\}$$

定理 5 在定理4的同样假设下，有

$$\left|\frac{1}{2\pi^2R^3}\iiint_\sigma F(r,\varphi,\theta)\,d\sigma-\int_0^1 F(Rx,2\pi N^2x,2\pi Nx)x^2\right.$$

$$\left.\times|\sin(2\pi N^2x)|\,dx\right|$$

$$\leq 8\left\{(R+1)\left(\pi+\frac{1}{2}\right)\omega(F;N^{-1},0,N^{-1})+M_F\frac{1}{N}\right\}$$

另外，我们如果令

$$f(x,y,z)=F(Ry,2\pi x,2\pi z)y^2|\sin(2\pi x)|,$$

并采用与前完全类似的方法，则不难得到估计

$$\omega(f;N^{-1},0,N^{-1})\leq(2\pi+1)^2\omega(F;0,N^{-1},N^{-1})+2\pi M_FN^{-1}$$

因此又有下面的

定理 6 在定理4的同样假设下，有

$$\left|\frac{1}{2\pi^2R^3}\iiint_\sigma F(r,\varphi,\theta)\,d\sigma-\int_0^1 F(R\langle N^2x\rangle,\right.$$

$$\left.2\pi x,2\pi Nx)(\langle N^2x\rangle)^2|\sin(2\pi x)|\,dx\right|$$

$$\leq 4\{(2\pi+1)^2\omega(F;0,N^{-1},N^{-1})+2\pi M_FN^{-1}\}$$

定理4，5，6显然都说明了我们总可以利用含大参数的线积分的极限去表示球域上的三重积分．例如定理4隐含着极限等式

$$\lim_{N\to\infty} 2\pi^2 R^3 \int_0^1 F(Rx, 2\pi Nx, 2\pi N^2 x) x^2 |\sin(2\pi Nx)| dx$$

$$= \iiint_\sigma F(r, \varphi, \theta) d\sigma$$

这个极限式可以看作是Maréchal-Wilkins的公式(2.1)′拓广到三重积分的情形，当然它们之间并不存在包含的关系.

显而易见，定理 4 与定理 5 中的线积分中的被积函数都是x的连续函数.因此当N取得足够地大而使得$R\omega(F; N^{-1}, N^{-1}, 0) + M_F N^{-1}$或$R\omega(F; N^{-1}, 0, N^{-1}) + M_F N^{-1}$足够小时，便可利用定理 4 或定理 5 中的连续函数的单积分近似地去计算球域σ上的三重积分. 更一般地，如果直接应用定理 2，则我们将得到如下的近似关系式

$$2\pi^2 R^3 \int_0^1 F(Rx, 2\pi\lambda x, 2\pi\mu x) x^2 |\sin(2\pi\lambda x)| dx$$

$$\approx \iiint_\sigma F(r, \varphi, \theta) d\sigma$$

此处我们假定先取λ足够大，然后再选μ充分大.

§4. 基本展开定理

由Maréchal机械积分仪所依据的数学原理(即线积分逼近重积分的原则) 所引出的一系列发展中，最具有丰富概括性的成果之一，就是关于下述形式的积分

$$\int_0^1 f(x, \langle\lambda x\rangle) dx$$

的渐近展开方法.设r为任意一个正整数，λ为任意一个正数.则有下面的

定理 7 设带形区域$[0, 1] \times (-\infty, \infty)$上的二元连续函数$f(x, y)$对$x$具有直至$r$阶的连续偏导数，对$y$是周期的，周期是1.则

$$\int_0^1 f(x,\lambda x)\,dx = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\lambda^{-\nu}}{\nu!}\left[\int_\lambda^{\lambda+1} f^{(\nu-1,0)}(1,y)B_\nu(y-\lambda)dy\right.$$

$$\left.-\int_0^1 f^{(\nu-1,0)}(0,y)B_\nu(y)dy\right]$$

$$-\frac{\lambda^{-r}}{r!}\int_0^1 dx\int_{\lambda x}^{\lambda x+1} f^{(r,0)}(x,y)B_r(y-\lambda x)dx$$

$$(2.16)$$

式中$f^{(\nu,0)}(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu f(x,y)$，$B_\nu(y)$ 是ν次 Bernoulli多项式.

证 写

$$a_\nu(x) = \frac{\lambda^{-\nu}}{\nu!}\int_{\lambda x}^{\lambda x+1} f^{(\nu-1,0)}(x,y)B_\nu(y-\lambda x)dy \quad (2.17)$$

我们有

$$a_\nu(1)-a_\nu(0)=\frac{\lambda^{-\nu}}{\nu!}\left[\int_\lambda^{\lambda+1} f^{(\nu-1,0)}(1,y)B_\nu(y-\lambda)dy\right.$$

$$\left.-\int_0^1 f^{(\nu-1,0)}(0,y)B_\nu(y)dy\right] \quad (2.18)$$

另一方面，由关于含参变量积分的 Leibniz 求导法则，

$$a_\nu'(x)=\frac{\lambda^{-\nu}}{\nu!}\int_{\lambda x}^{\lambda x+1} f^{(\nu,0)}(x,y)B_\nu(y-\lambda x)dy$$

$$-\frac{\lambda^{-\nu+1}}{(\nu-1)!}\int_{\lambda x}^{\lambda x+1} f^{(\nu-1,0)}(x,y)B_{\nu-1}(y-\lambda x)dy$$

$$+\frac{\lambda^{-\nu+1}}{\nu!}\left[f^{(\nu-1,0)}(x,\lambda x+1)B_\nu(1)\right.$$

$$\left.-f^{(\nu-1,0)}(x,\lambda x)B_\nu(0)\right]$$

由于 $f^{(\nu-1,0)}(x,y)$ 关于y的周期性，以及$B_\nu(1)=B_\nu(0)\ (\nu\geqslant 2)$，

$B_1(1)-B_1(0)=1$，在上式中

$$\frac{\lambda^{-\nu+1}}{\nu!}[f^{(\nu-1,0)}(x,\lambda x+1)B_\nu(1)-f^{(\nu-1,0)}(x,\lambda x)B_\nu(0)]$$

$$=\begin{cases}0 & (2\leqslant\nu\leqslant r)\\ f(x,\lambda x) & (\nu=1)\end{cases}$$

因此

$$\sum_{\nu=1}^{r}[a_\nu(1)-a_\nu(0)]=\sum_{\nu=1}^{r}\int_0^1 a_\nu'(x)dx$$

$$=-\int_0^1 dx\int_{\lambda x}^{\lambda x+1}f(x,y)dx+\int_0^1 f(x,\lambda x)dx$$

$$+\frac{\lambda^{-r}}{r!}\int_0^1 dx\int_{\lambda x}^{\lambda x+1}f^{(r,0)}(x,y)B_r(y-\lambda x)dy$$

$f(x,y)$关于y在任何一个周期上的积分都相等，所以

$$\int_0^1 f(x,\lambda x)dx=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy+\sum_{\nu=1}^{r}[a_\nu(1)-a_\nu(0)]$$

$$-\frac{\lambda^{-r}}{r!}\int_0^1 dx\int_{\lambda x}^{\lambda x+1}f^{(r,0)}(x,y)B_r(y-\lambda x)dy$$

以式(2.18)代入上式，即得式(2.16).证毕.

定理 8 设单位正方形区域$[0,1]\times[0,1]$上的二元连续函数$f(x,y)$对x具有直至r阶的连续偏导数. 则

$$\int_0^1 f(x,\langle\lambda x\rangle)dx=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\lambda^{-\nu}}{\nu!}\int_0^1[f^{(\nu-1,0)}(1,y)\overline{B}_\nu(y-\lambda)-f^{(\nu-1,0)}(0,y)B_\nu(y)]dy$$

$$-\frac{\lambda^{-r}}{r!}\int_0^1\int_0^1 f^{(r,0)}(x,y)\overline{B}_r(y-\lambda x)dxdy \qquad (2.19)$$

式中$\langle y\rangle$表y的小数部分，$\overline{B}_\nu=B_\nu(\langle y\rangle)$是Bernoulli函数.

证 若$f(x,0)=f(x,1)$，则$f(x,\langle y\rangle)$满足定理1的条件，由式(2.16)得

$$\int_0^1 f(x,\langle\lambda x\rangle)\,dx=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\lambda^{-\nu}}{\nu!}\left[\int_\lambda^{\lambda+1} f^{(\nu-1,0)}(1,\langle y\rangle)\overline{B}_\nu(y-\lambda)dy\right.$$

$$\left.-\int_0^1 f^{(\nu-1,0)}(0,\langle y\rangle)B_\nu(y)dy\right]$$

$$-\frac{\lambda^{-r}}{r!}\int_0^1 dx\int_{\lambda x}^{\lambda x+1} f^{(r,0)}(x,\langle y\rangle)\,\overline{B}_r(y-\lambda x)dy$$

(2.20)

式(2.20)中有两处 Bernoulli 多项式已改写成 Bernoulli 函数，之所以可以如此是因为其自变量位于 $(0,1)$ 中. 这样一来，积分 $\int_\lambda^{\lambda+1}\cdots dy$ 和 $\int_{\lambda x}^{\lambda x+1}\cdots dy$ 中的被积函数是周期为 1 的周期函数，故而这两个积分又都可以写成 $\int_0^1\cdots dy$，这时被积函数变元位置上的 $\langle y\rangle$ 可以写成 y，式(2.20)成了式(2.19).

当 $f(x,0)=f(x,1)$ 的条件不满足时，$f(x,\langle y\rangle)$ 在 $[0,1]\times(-\infty,\infty)$ 上仅为分片连续的. 这时，反省定理 7 的证明，我们在求 $a_\nu'(x)$ 时可以就 $x\in\left(\frac{i-1}{\lambda},\ \frac{i}{\lambda}\right)\cap(0,1)\ (i=1,2,\cdots,i<\lambda+1)$ 把 $a_\nu(x)$ 表成两个积分之和 $\int_{\lambda x}^{i}\cdots dy+\int_i^{\lambda x+1}\cdots dy$，分别对每个积分应用 Leidniz 法则，如此最终仍将导至相同的结果. 证毕.

定理 9 在定理 8 的条件下，当实参数 λ 趋向于正无穷时，

$$\int_0^1 f(x,\langle\lambda x\rangle)dx=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\lambda^{-\nu}}{\nu!}\int_0^1\left[f^{(\nu-1,0)}(1,y)\overline{B}_\nu(y-\lambda)\right.$$

$$\left.-f^{(\nu-1,0)}(0,y)B_\nu(y)\right]dy+o(\lambda^{-r})$$

(2.21)

证 由徐利治扩充的(参见文献[90]，第262页命题154) Fejér[88]引理，当$\lambda\to\infty$时

$$\lim\left[-\frac{1}{r!}\int_0^1\int_0^1 f^{(r,0)}(x,y)\,\overline{B}_r(y-\lambda x)\,dxdy\right]$$

$$=-\frac{1}{r!}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f^{(r,0)}(x,y)\,\overline{B}_r(y-w)\,dwdxdy=0$$

证毕.

对区间$[0,1]$上的连续函数$\varphi(y)$以及区域$[0,1]\times[0,1]$上的二元连续函数$g(x,y)$，记

$$\|\varphi\|=\sqrt{\int_0^1\varphi(y)^2dy}\ ,\quad \|g\|=\sqrt{\int_0^1\int_0^1 g(x,y)^2dxdy}$$

定理 10 在定理8的条件下，写

$$S_{r-1}(f,\lambda)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dxdy+\sum_{\nu=1}^{r-1}\frac{\lambda^{-\nu}}{\nu!}\int_0^1\left[f^{(\nu-1,0)}(1,y)\,\overline{B}_\nu(y-\lambda)\right.$$

$$\left.-f^{(\nu-1,0)}(0,y)\,B_\nu(y)\right]dy \tag{2.22}$$

时，成立不等式

$$\left|\int_0^1 f(x,\langle\lambda x\rangle)\,dx-S_{r-1}(f,\lambda)\right|$$

$$\leqslant\lambda^{-r}\left[\sqrt{2(-1)^{r-1}\left(\frac{B_{2r}}{(2r)!}+\frac{B_{2r+1}(\langle-\lambda\rangle)}{(2r+1)!\lambda}\right)}\,\|f^{(r,0)}\|\right.$$

$$\left.+\sqrt{2(-1)^{r-1}\frac{B_{2r}-B_{2r}(\langle-\lambda\rangle)}{(2r)!}}\,\|f^{(r-1,0)}(1,\cdot)\|\right]$$

$$\tag{2.23}$$

若λ为整数，则不等式(2.23)的右端简化为

$$\lambda^{-r}\sqrt{2(-1)^{r-1}\frac{B_{2r}}{(2r)!}}\,\|f^{(r,0)}\|.$$

证 由式(2.19)和(2.22)，

$$\int_0^1 f(x,\{\lambda x\})dx - S_{r-1}(f,\lambda)$$

$$= -\frac{\lambda^{-r}}{r!}\int_0^1\int_0^1 f^{(r,0)}(x,y)[\overline{B}_r(y-\lambda x) - B_r(y)]dxdy$$

$$+\frac{\lambda^{-r}}{r!}\int_0^1 f^{(r-1,0)}(1,y)[\overline{B}_r(y-\lambda) - B_r(y)]dy$$

对上式右端的两项分别应用 Cauchy 不等式，经过如下的计算即得不等式(2.23)：

$$\frac{1}{r!^2}\int_0^1\int_0^1 (\overline{B}_r(y-\lambda x) - B_r(y))^2 dxdy$$

$$=\frac{1}{r!^2}\int_0^1 dx\int_0^1 (\overline{B}_r(y-\lambda x)^2 - 2\overline{B}_r(y-\lambda x)B_r(y) + B_r(y)^2)dy$$

$$=\frac{2}{r!^2}\int_0^1 dx\int_0^1 (B_r(y) - \overline{B}_r(y-\lambda x))B_r(y)dy$$

$$=2\int_0^1\Bigg\{\sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^\nu \frac{B_{r+\nu+1}(y) - \overline{B}_{r+\nu+1}(y-\lambda x)}{(r+\nu-1)!}$$

$$\times\frac{B_{r-\nu}(y)}{(r-\nu)!}\Bigg|_{y=1}^{y=0}$$

$$+(-1)^r\int_0^1\frac{B_{2r}(y) - B_{2r}(y-\lambda x)}{(2r)!}dy\Bigg\}dx$$

$$=2(-1)^{r-1}\int_0^1\frac{B_{2r} - \overline{B}_{2r}(-\lambda x)}{(2r)!}dx$$

$$=2(-1)^{r-1}\left[\frac{B_{2r}}{(2r)!} + \frac{\overline{B}_{2r+1}(-\lambda)}{(2r+1)!\lambda}\right]$$

$$\frac{1}{r!^2}\int_0^1 (\overline{B}_r(y-\lambda) - B_r(y))^2 dy$$

$$=\frac{2}{r!^2}\int_0^1 (B_r(y) - \overline{B}_r(y-\lambda))B_r(y)dy$$

$$=2(-1)^{r-1}\frac{B_{2r}-\overline{B}_{2r}(-\lambda)}{(2r)!}$$

证毕.

定理 11 设$\varphi(x)$是区间 $[0,1]$ 上 r 次连续可微的函数，而$\psi(x)$是一个连续的周期函数，周期是1，则对

$$I=\int_0^1\varphi(x)\psi(\lambda x)dx,$$

$$S_r=\int_0^1\varphi(x)dx\int_0^1\psi(x)dx$$
$$+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\lambda^{-\nu}}{\nu!}\left[\varphi^{(\nu-1)}(1)\int_\lambda^{\lambda+1}\psi(x)B_\nu(x-\lambda)dx\right.$$
$$\left.-\varphi^{(\nu-1)}(0)\int_0^1\psi(x)\,B_\nu(x)\,dx\right]$$

当$\lambda\to\infty$时有

$$I=S_r+O(\lambda^{-r})$$

其中

$$O(\lambda^{-r})=-\frac{\lambda^{-r}}{r!}\int_0^1\varphi^{(r)}(x)\int_{\lambda x}^{\lambda x+1}\psi(t)B_r(t-\lambda x)dtdx$$

又有

$$I=S_{r-1}+O(\lambda^{-r})$$

其中

$$|O(\lambda^{-r})|\leqslant\lambda^{-r}\left[\sqrt{2(-1)^{r-1}\left(\frac{B_{2r}}{(2r)!}+\frac{B_{2r+1}(\langle-\lambda\rangle)}{(2r+1)!\lambda}\right)}\|\varphi^{(r)}\|\right.$$
$$\left.+\sqrt{2(-1)^{r-1}\frac{B_{2r}-B_{2r}(\langle-\lambda\rangle)}{(2r)!}}\,|\varphi^{(r-1)}(1)|\,\|\psi\|\right.$$

(2.24)

证 这是于定理7、定理9和定理10中置$f(x,y)=\varphi(x)\cdot\psi(y)$的结果. 证毕.

例（见文献【1】，第265页） 倘要计算积分

$$I=\int_0^1 \cos(2\pi x)\sin(25\pi x)\,dx$$

则可于定理11取 $\varphi(x)=\cos(2\pi x)$，$\psi(x)=\sin(2\pi x)$，$\lambda=12.5$，$r=2m+1$，从而得到 I 的近似序列

$$S_{2m}=\sum_{k=1}^{m}\frac{2(-1)^k(2\pi)^{2k-2}}{(2k-1)!}\left(\frac{2}{25}\right)^{2k-1}\int_0^1 \sin(2\pi x)B_{2k-1}(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{2}{25}\right)^{2k-1}\qquad (m=1,2,3,\cdots)$$

由于

$$\|\varphi^{(r)}\|=2^{r-\frac{1}{2}}\pi^r,\quad \|\psi\|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{|B_{2r}|}{(2r)!}=\frac{1}{2^{2r-1}\pi^{2r}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2r}}\approx\frac{1}{2^{2r-1}\pi^{2r}}$$

所以由(2.24)大致上有

$$|I-S_{2m}|\lesssim\left(\frac{2}{25}\right)^{2m+1}\left(1+\frac{1}{\pi}\right)$$

由是得

$$|I-S_2|<0.00067,\quad |I-S_4|\lesssim 0.0000044^{1)}$$

事实上，$S_2=\dfrac{2}{25\pi}=0.0254648$，

$$S_4=\left(1+\left(\frac{2}{25}\right)^2\right)\frac{2}{25\pi}=0.0256278,$$

$$I=\left(1-\left(\frac{2}{25}\right)^2\right)^{-1}\frac{2}{25\pi}=0.0256288,$$ 从而

$$I-S_2=0.00016,\quad I-S_4=0.0000010$$

1)文献〔1〕中的S_2和S_4数值计算有误，因而误差比此界大.

可见定理10和定理11的余项估计式(2.23)和(2.24)是十分有效的.

当 $\lambda=N$ 为正整数时，由定理7立得下面的

定理 12 设二元连续函数$f(x,y)$在区域$D(0\leqslant x\leqslant 1, -\infty<y<\infty)$上对$x$具有$m$阶连续偏导数，且对$y$具有周期1，则恒成立如下的展开公式

$$\int_0^1 f(x,Nx)\,dx=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$$

$$+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{1}{N}\right)^{\nu}\int_0^1\left[\frac{\partial^{\nu-1}f}{\partial x^{\nu-1}}\right]_{x=0}^{x=1}\cdot B_\nu(y)\,dy+\rho_m$$

其中余项ρ_m可以表成

$$\rho_m=-\frac{1}{m!}\left(\frac{1}{N}\right)^m\int_0^1 dx\int_{Nx}^{Nx+1}B_m(y-Nx)\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\right)dy$$

并且ρ_m有如下的估计

$$\left|\rho_m\right|\leqslant\left(\frac{1}{N}\right)^m\sqrt{2(-1)^{m-1}\frac{B_{2m}}{(2m)!}}\left\|\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\right\|$$

§5. 一类重积分的近似计算问题

下面我们要利用展开定理12来讨论一类有界区域上的重积分的近似计算问题.

令$\mathfrak{S}$表示一个平面区域：$0\leqslant x\leqslant 1$，$\psi(x)\leqslant y\leqslant\phi(x)$，这里$\psi(x)$与$\phi(x)$是单值的连续函数或可微函数. 记

$$\theta(x)\doteq\phi(x)-\psi(x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

仍采用前面的记法，令$\langle x\rangle=x-[x]$表示实数x的分数部份，其中$[x]$表整数部分.

不难验证，连续函数$f(x,y)$分布在区域$\mathfrak{S}$上的重积分$\iint f(x,y)\,dS$总可以用如下形式的单积分

$$\int_0^1 f(x,\psi(x)+\theta(x)\langle Nx\rangle)\theta(x)\,dx$$

去逼近它，其中N是个大整数.但是，当N是大整数时，上述定积分的数值计算又成为困难之事，因为其中出现了激烈振荡型的被积函数，而且被积函数还往往是不连续的，例如$x=\frac{1}{N}$，$\frac{2}{N}$，$\frac{3}{N}$，……等处将是不连续点. 因此，需要考虑的问题是：怎样改造被积函数使它成为连续函数？应该引进怎样一批附加项才能使得单积分中的N即使选为较小的整数时也能很好地逼近重积分？下面即将指出，第一个问题是容易解决的，而定理12中的展开公式及有关余项估计正可以用来解决第二个问题.

容易看出

$$\iint_{\mathfrak{S}} f\,dS=\int_0^1 dx\int_0^{\theta(x)} f(x,\psi(x)+t)\,dt$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,\psi(x)+\theta(x)y)\theta(x)\,dy$$

需要注意的是，公式(2.27)既然是用来计算重积分，那就不能把N取得较大，以免对单积分$\int_0^1 \Phi(x,Nx)\,dx$的计算增加困难.事实上只要适当添加几个定积分(也就是适当选取m)，就可以将N取得较小.公式(2.27)的主要意义，在于它提供了一个构造$\mathfrak{S}$区域上的近似求积公式的途径；因为适当选定了N和m，再把定积分用机械求积和代入之后，即可得到关于$\iint_{\mathfrak{S}} f\,dS$的近似求积公式.

如果要计算$\mathfrak{S}$区域上的一批重积分，那末去构造这类求积公式显然是值得的.公式(2.27)对各种形状的区域$\mathfrak{S}$都适用，这是它的一个优点. 当然区域的边界曲线$y=\psi(x)$与$y=\phi(x)$必须是高度光滑的曲线才行.特别，如果$\psi(x)\equiv 0,\phi(x)\equiv 1$，则(2.27)中的

展开式便简化为定理12，其中$\delta_N=\rho_{m-1}=\rho_{m-1}(N)$.

下面我们来讨论一类重要的特殊区域. 对于函数$\theta(x)=\phi(x)-\psi(x)$，如果$\theta(0)=\theta(1)=0$，则区域 $\mathfrak{S}$ $(0\leqslant x\leqslant 1, \psi(x)\leqslant y\leqslant \phi(x))$也就是由一对曲线相交而成的区域，如图2.1所示

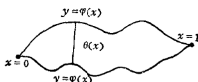


图 2.1

在$\phi(x)$，$\psi(x)$具有可微性的条件下，$\phi'(0)$，$\phi'(1)$，$\psi'(0)$，$\psi'(1)$均为有限值，因此在点$(0, \phi(0))$，$(1, \phi(1))$处不能有垂直切线；所以由光滑曲线围成的区域并不包括在这一类区域之内. 但是这一类区域的形状还是具有很大的任意性的. 有许多非常复杂的区域，可以几何地分解成为这一类区域加上一些单纯形区域.

以下我们将假定$f(x,y)$，$\phi(x)$，$\psi(x)$具有连续的四阶导数，从而$\Phi(x,y)$在$\mathfrak{S}$上也有连续的四阶偏导数. 非常凑巧，在这样为了使右端积分中的被积函数延拓到带状区域$0\leqslant x\leqslant 1$，$-\infty<y<\infty$，可以取$f(x,\psi(x)+\theta(x)\langle y\rangle)\theta(x)$. 但这样的函数在$y=0$，$\pm 1$，$\pm 2$，……处将会出现不连续情况. 另一方面，我们注意到

$$\iint\limits_{\mathfrak{S}} f(x,y)\,dS=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,\phi(x)-\theta(x)y)\theta(x)\,dy$$

而且按下式定义的函数

$$\Phi(x,y)=\frac{1}{2}\theta(x)\{f(x,\psi(x)+\theta(x)\langle y\rangle)$$
$$+f(x,\phi(x)-\theta(x)\langle y\rangle)\} \qquad (2.25)$$

在$y=0$，± 1，± 2，…处恒具有连续性. 事实上，这是因为$\Phi(x,y)\equiv\Phi(x,\langle y\rangle)$，并且

$$\lim_{y\to 0+}\Phi(x,y)=\Phi(x,0)=\Phi(x,1)=\lim_{y\to 1-}\Phi(x,y)$$

于是我们有

$$\iint_{\mathfrak{S}} f(x,y)\,dS=\int_0^1\int_0^1 \Phi(x,y)\,dxdy \qquad (2.26)$$

这里$\Phi(x,y)$是对变元y具有周期为1的连续函数.而且如果$f(x,y)$在$\mathfrak{S}$上对x和y都具有m阶连续偏导数,又如果$\psi(x)$与$\Phi(x)$在区间$[0,1]$上有m阶连续导数的话,则按(2.25)式界定的函数$\Phi(x,y)$对x将具有m阶连续偏导数.这样一来,借助于(2.26)式的右端我们便可应用展开定理12而得出下述结果.

定理 13 设$f(x,y)$在有界区域$\mathfrak{S}(0\leqslant x\leqslant 1,\psi(x)\leqslant y\leqslant \phi(x))$上对$x$和$y$具有连续的$m$阶偏导数,又$\psi(x)$与$\phi(x)$在区间$[0,1]$上也有$m$阶连续导数.那末,我们有如下的渐近展开式

$$\iint_{\mathfrak{S}} f(x,y)\,dS=\int_0^1 \Phi(x,Nx)\,dx - \sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{1}{N}\right)^{\nu}\int_0^1\left[\frac{\partial^{\nu-1}\Phi}{\partial x^{\nu-1}}\right]_{x=0}^{x=1}\cdot B_\nu(y)\,dy+\delta_N$$

(2.27)

这里$\Phi(x,y)$按(2.25)式定义,而关于余项δ_N有如下的估计

$$|\delta_N|\leqslant\frac{2}{m!}\|B_m(x)\|\cdot\left\|\frac{\partial^m\Phi}{\partial x^m}\right\|\cdot\left(\frac{1}{N}\right)^m \qquad (2.28)$$

的情形下,如果$\mathfrak{S}$是由两曲线相交而成的区域(此时$\phi(0)=\psi(0)$, $\phi(1)=\psi(1)$,那末恰好有

$$\int_0^1\left[\frac{\partial^{\nu-1}\Phi}{\partial x^{\nu-1}}\right]_{x=0}^{x=1}\cdot B_\nu(y)\,dy=0 \quad (\nu=1,2,3)$$

(2.29)

于是根据定理13以及估计式(2.28)我们可证得下述定理.

定理 14 设$f(x,y)$在区域$\mathfrak{S}(0\leqslant x\leqslant 1,\ \psi(x)\leqslant y\leqslant\phi(x))$上有着连续的四阶偏导数,$\phi(x)$与$\psi(x)$在$0\leqslant x\leqslant 1$上各有四阶连续

导数，且$\phi(0)=\psi(0)$，$\phi(1)=\psi(1)$；那末有公式

$$\iint_{G} f(x,y)\,dS=\int_0^1 \Phi(x,Nx)\,dx+\delta_N \tag{2.30}$$

这里的余项δ_N有估计

$$|\delta_N|\leqslant\frac{1}{360}\left\|\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}\right\|\cdot\left(\frac{1}{N}\right)^4 \tag{2.31}$$

证 只需验证(2.29)中的三个等式以及不等式(2.31)．我们要用到四个 Bernoulli 多项式$B_1(y)$，$B_2(y)$，$B_3(y)$，$B_4(y)$．这些多项式在区间$[0,1]$上的积分都是零．事实上，由于$B_n'(y)=nB_{n-1}(y)$，所以一般说来恒有

$$\int_0^1 B_\nu(y)\,dy=\frac{1}{\nu+1}(B^{\nu+1}(1)-B_{\nu+1}(0))=0 \tag{2.32}$$

注意$\theta(0)=\theta(1)=0$，$\phi(0)=\psi(0)$，$\phi(1)=\psi(1)$，所以立得

$$\Phi(1,y)-\Phi(0,y)\equiv 0$$

$$\Phi_x'(1,y)-\Phi_x'(0,y)=\theta'(1)f(1,\phi(1))-\theta'(0)f(0,\phi(0))$$

因此根据(2.32)可知等式(2.29)对$\nu=1$，2是成立的．

再考虑Φ对x的二阶偏导数，容易算出

$$\Phi_{xx}''(1,y)-\Phi_{xx}''(0,y)=\text{常数(不含}y\text{)}$$

因此再根据(2.32)可见等式(2.29)对$\nu=3$也同样成立．

最后再算出$\|B_4(y)\|$之值：

$$\|B_4(y)\|=\max_{0\leqslant y\leqslant 1}\left|y^4-2y^3+y^2-\frac{1}{30}\right|$$

$$=\max_{0\leqslant y\leqslant 1}\left|y^2(1-y)^2-\frac{1}{30}\right|=\frac{1}{30}$$

因此根据(2.27)，(2.28)及(2.29)，也就完成了(2.30)与(2.31)的证明．

例 1 取$N=10$，则由(2.30)及(2.31)可得

$$\iint_G f(x,y)\,dS = \frac{1}{10}\int_0^1 \left\{\sum_{\nu=0}^{9}\Phi\left(\frac{x+\nu}{10}, x\right)\right\}dx + \delta_{10} \qquad (2.33)$$

这里的$\Phi(x,y)$由(2.25)式定义，而δ_{10}有如下估计

$$|\delta_{10}| \leqslant \frac{1}{3600000}\|\partial^4\Phi/\partial x^4\| \qquad (2.34)$$

对于(2.33)式中出现的定积分，自然可以选用合适的求积公式(例如Gauss型公式或其它近似公式)来计算.

为了得到比定理14更进一步的结论，让我们再计算(2.29)式左端于$\nu=4$时的积分值. 第一步立即可得出

$$\int_0^1 y\cdot B_4(y)\,dy = \int_0^1 B_4(y)\,dy = 0 \qquad (2.35)$$

$$\int_0^1 y^2\cdot B_4(y)\,dy = -\frac{1}{630} \qquad (2.36)$$

然后计算Φ对x的三阶偏导数，可得出(其中A, A'表示某两个常数)

$$\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right)_{x=1} = \text{常数项} + Ay + 3\theta'(1)^3\cdot f''_{yy}(1,\phi(1))y^2 \qquad (2.37)$$

$$\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}\right)_{x=0} = \text{常数项} + A'y + 3\theta'(0)^3\cdot f''_{yy}(0,\phi(0))y^2 \qquad (2.38)$$

由此应用定理13并根据(2.29), (2.35), (2.36), (2.37), (2.38)便可得出下述结果.

定理 15 设$f(x,y)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$有着连续的五阶导数(或偏导数)；则有

$$\iint_G f(x,y)\,dS = \int_0^1 \Phi(x, Nx)\,dx +$$

$$+\frac{1}{5040}\{f''_{uu}(1,\phi(1))\theta'(1)^3-f''_{uu}(0,\phi(0))\theta'(0)^3\}\left(\frac{1}{N}\right)^4+\varepsilon_N \tag{2.39}$$

其中余项ε_N有

$$|\varepsilon_N|<\frac{1}{1500}\left\|\frac{\partial^5\Phi}{\partial x^5}\right\|\cdot\left(\frac{1}{N}\right)^5 \tag{2.40}$$

这里估计式(2.40)右端的常数是通过对$\|B_5(y)\|$的计算得出的．因为$B_5(0)=B_5(1)=0$，所以下式

$$\|B_5(y)\|=\max_{0<y<1}\left|y^5-\frac{5}{2}y^4+\frac{5}{3}y^3-\frac{1}{6}y\right|$$

右端的最大值将在区间$0\leqslant y\leqslant 1$内部达到．利用微分学方法容易求得$|B_5(y)|$取极值的位置是

$$y_1=\frac{1}{2}+\sqrt{1-\frac{2}{15}\sqrt{30}},\qquad y_2=\frac{1}{2}-\sqrt{1-\frac{2}{15}\sqrt{30}}$$

于是由简单计算可得估计

$$\max\{|B_5(y_1)|,\ |B_5(y_2)|\}<\frac{1}{25}$$

从而根据(2.28)就可得到不等式(2.40)．

应用定理14及15可以构造出一些极其简单的求积公式．下面我们举两个例子作为本节的结尾．

例 2 在定理15中取$N=3$，然后再利用$n=10$（含有11个结点）的 Simpson 求积公式我们便可得到如下形式的一个近似公式

$$\iint_{\sigma} f(x,y)\,dS\approx\frac{2}{15}\left\{\Phi\left(\frac{1}{10},\ \frac{3}{10}\right)+\Phi\left(\frac{3}{10},\ \frac{9}{10}\right)\right.$$

$$\left.+\Phi\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)+\Phi\left(\frac{7}{10},\ \frac{1}{10}\right)+\Phi\left(\frac{9}{10},\ \frac{7}{10}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{15}\left\{\Phi\left(\frac{1}{5},\ \frac{3}{5}\right)+\Phi\left(\frac{2}{5},\ \frac{1}{5}\right)\right.$$

$$+\Phi\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)+\Phi\left(\frac{4}{5},\ \frac{2}{5}\right)\Bigg\}$$

$$+\frac{1}{408240}\{f''_{vv}(1,\phi(1))\theta'(1)^3-f''_{vv}(0,\phi(0))\theta'(0)^3\}$$

自然这里出现的各个函数都须满足定理15的条件，而 $\mathfrak{G}$ 即为定理14与15所考虑的区域.

在如上的选择中 $N=3$，$n=10$. 因为 3 和10是互质的. 故以10作分母时，分式 $\langle Nx_i\rangle$ $\left(\text{其中 } x_i=\frac{i}{10},\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9\right)$的分子走遍 mod 10 的完全剩余系. 同理，如果取 $N=3$，$n=14$ 或者 $N=5$，$n=16$，则那些相应分式 $\langle Nx_i\rangle$ 的分子也将分别遍历mod 14或mod 16的完全剩余系.

如果要求的精度不高，那末也可以在上述的近似公式中舍弃含有微商f''_{vv}的最末两项，此时它就相当于直接应用定理14作出的公式，可简记为

$$\iint_{\mathfrak{G}} f(x,y)\,dS\approx\frac{1}{15}\sum_{\nu=1}^{9}\frac{4}{3+(-1)^{\nu}}\Phi\left(\frac{\nu}{10},\ \left\{\frac{3\nu}{10}\right\}\right)$$

例 3 取 $N=5$，$n=16$ (Simpson公式结点数为17). 则由定理15可得更较精密的求积公式

$$\iint_{\mathfrak{G}} f(x,y)\,dS\approx\frac{1}{6}\sum_{\nu=1}^{15}\frac{1}{3+(-1)^{\nu}}\Phi\left(\frac{\nu}{16}\right),\ \left\{\frac{5\nu}{16}\right\}\right)$$

$$+\frac{1}{3150000}[f''_{vv}(1,\phi(1))\cdot\theta'(1)^3-f''_{vv}(0,\phi(0))\cdot\theta'(0)^3]$$

用以上二个公式去作近似计算时显然是比较简便的. 如果这些公式在实际应用时还不够符合精度要求，那末就不妨选取较大的N和n去构造一些精度更高的近似公式，而定理14和 15 即为构造公式的理论依据.

§6. 振荡型积分的近似计算法

当λ为实的大参数时，式(2.16)左端的积分是振荡型积分.对这种积分来说，通常的数值积分公式是不适用的. 定理 7 中的展开公式(2.16)恰好对这种积分提供了一个近似计算方法，因为它右端的诸积分已经不再是振荡型积分了，对它们可以应用通常的数值积分公式.

基本展开定理 7 及 8 概括了并改进了过去有关这一专题研究方面的许多结果.例如 Еругин-Соболев, Крылов, Wilkins和Havie等人所证得的公式都是定理 7 的特例.

将基本展开定理用于近似计算振荡型积分时，当$\lambda>10$或$\lambda>15$时，通常只需在展开式(2.16)右端取很少几个项就能达到较高的近似程度(参阅§4的例).

在实际问题中，我们曾碰到过大参数积分中的函数$f(x,y)$为不可分离变数的情形，这时应用基本展开定理去进行近似计算就比较方便了. 以往别人研究这种积分时均是针对$f(x,y)=f(x)g(y)$的情形进行的. 较复杂的数值计算例子于此就不列举了.

下面我们研究含多个大参数的振荡型积分的近似计算法.

假设$\Phi(x,y_1,\cdots,y_k)$是区域$D(a\leqslant x\leqslant b,-\infty<y_i<\infty)$上的连续函数，且是$y_1,\cdots,y_k$各变量的周期函数.不失一般性，可假定各$y_i$变量的周期都是 1 . 在本节中我们将讨论如何估计下述普遍类型的积分值：

$$I=\int_a^b\Phi(x,N_1x,N_2x,\cdots,N_kx)\,dx$$

$$J=\int_V\cdots\int f(x_1,\cdots,x_S,N_1x_1,\cdots,N_kx_k)\,dV$$

此处V为一高维超越正方体，维数是$\max(s,k)$； $N_1,\cdots,N_k$是一批不同阶的无穷大参变量或任意的大参数.又为了写法上简便计，

我们用X代表一组变数$x_1,\cdots,x_k$；用$\langle NX\rangle$代表一组数$\langle N_1x_1\rangle,\cdots,\langle N_kx_k\rangle$；$dX$代表$dx_1\cdots dx_k$等.

应用§2的基本引理，可证如下的定理.

定理 16 设$f(X;Y)\equiv f(x_1,\cdots,x_s;\ y_1,\cdots,y_k)$是$V_{s+k}$上的连续函数，且关于$y_1,\cdots,y_k$诸变量具有周期1. 记$m=\max(s,k)$，$\mu=\min(s,k)$，$dX=dx_1\cdots dx_s$，$dY=dy_1\cdots dy_k$，而$dV$表积分域上的体积元素，则

$$\int_{V_m}\cdots\int f(x_1,\cdots,x_s;N_1x_1,\cdots,N_kx_k)dV$$

$$=\int_{V_{s+k}}\cdots\int f(X;Y)dX\cdot dY$$

$$=O\left[\omega\left(f;\frac{1}{N_1},\cdots,\frac{1}{N_\mu},0,\cdots,0\right)\right]\qquad(2.41)$$

证 须分两种情形加以论证. 首先考虑$s\leqslant k$的情形. 这时(2.41)式右端的$s+k$重积分可以改写成$2k$重积分，也即

$$\int_{V_{s+k}}\cdots\int f(X;Y)dXdY$$

$$=\int_{V_{2k}}\cdots\int f(X;Y)dx_1\cdots dx_kdy_1\cdots dy_k\qquad(2.42)$$

记

$$f(X;Y)\equiv f(x_1,\cdots,x_s;\ y_1,\cdots,y_k)(x_{s+1}\cdots x_k)^0$$

$$=g(x_1,\cdots,x_k;\ y_1,\cdots,y_k)\qquad(2.43)$$

从而

$$\omega\left(g;\ \frac{1}{N_1},\cdots,\frac{1}{N_k};0,\cdots,0\right)$$

$$=\omega\left(f;\ \frac{1}{N_1},\cdots,\frac{1}{N_s};0,\cdots,0\right)$$

因此将基本引理应用于(2.42)式的右端时，便得到

$$\int_{V_{2k}}\cdots\int f(X;Y)dV$$

$$=\int_{V_k}\cdots\int f(x_1,\cdots,x_s;N_1x_1,\cdots,N_kx_k)dV$$

$$+O\left[\omega\left(f;\ \frac{1}{N_1},\cdots,\frac{1}{N_k};\ 0,\ \cdots,\ 0\right)\right] \quad (2.44)$$

注意对上述情况来说，$k=m=\max(s,k)$，$s=\mu=\min(s,k)$. 故由(2.42)得知(2.41)为正确.

其次，再考虑$s<k$的情形. 这时可以将(2.41)式的右端积分写成下列形式

$$L=\int_{V_{s-k}}\cdots\int dx_{k+1}\cdots dx_s$$

$$\times\int_{V_{2k}}\cdots\int f(X;Y)dx_1\cdots dx_kdy_1\cdots dy_k \quad (2.45)$$

视$x_{k+1},\cdots,x_s$为固定参数，则被积函数可看作

$$f(x_1,\cdots,x_s;\ y_1,\cdots,y_k)=g(x_1,\cdots,x_k;\ y_1,\cdots,y_k)$$

从而

$$\omega\left(g;\ \frac{1}{N_1},\cdots,\frac{1}{N_k};0,\cdots,0\right)=\omega\left(f;\ \frac{1}{N_1},\cdots,\frac{1}{N_k};0,\cdots,0\right)$$

因此对(2.45)式右端V_{2k}上的积分应用基本引理时，我们又得到

$$L=\int_{V_{s-k}}\cdots\int dx_{k+1}\cdots dx_s$$

$$\times\int_{V_k}\cdots\int f(X;N_1x_1,\cdots,N_kx_k)dx_1\cdots dx_k$$

$$+\int_{V_{s-k}}\cdots\int dx_{k+1}\cdots dx_s$$

$$+O\left[\omega\left(f;\ \frac{1}{N_1},\cdots,\frac{1}{N_k};0,\cdots,0\right)\right]$$

$$=\int_{V_s}\cdots\int f(X;N_1x_1,\cdots,N_kx_k)dV$$

$$\times O\left[\omega\left(f;\ \frac{1}{N_1},\cdots,\frac{1}{N_k};\ 0,\ \cdots,0\right)\right]$$

由于在现在的情形下，$s=\max(s,k)$，$k=\min(s,k)$，故可见(2.41)式仍正确. 这样便证明了(2.41)式对任何情形都成立.

根据(2.41)式显然容易导出下列的推论.

推论 在定理16的假定下，并设$f(X;Y)$对诸x_i具有连续的偏导数，则我们有如下的不等式：

$$\left|\int_{V_m}\cdots\int f(x_1,\cdots,x_s;N_1x_1,\cdots,N_kx_k)dV\right.$$
$$\left.-\int_{V_{s+k}}\cdots\int f(X;Y)dV\right|\leqslant A\cdot\left(\frac{1}{N_1}+\cdots+\frac{1}{N_\mu}\right) \tag{2.46}$$

这里A为一绝对常数，而$m=\max(s,k)$，$\mu=\min(s,k)$.

从(2.41)式或(2.46)式看来，可见含有一批大参数$N_1,\cdots,N_k$的多元振荡函数的m重积分可以利用普通的多重积分来逼近，并且误差项是与$\omega\left(f;\frac{1}{N_1},\cdots,\frac{1}{N_\mu};0,\cdots,0\right)$或$\frac{1}{N_1}+\cdots+\frac{1}{N_\mu}$同阶的. 这表明当参数$N_1$，…，$N_k$之值越大，逼近程度也就越好. 因为一般说来，振荡函数的积分计算本身是很困难的事，而普通的多重积分却是可以用一些现成的求积公式去进行计算的，所以定理16及其推论的主要意义在于提供了一种关于近似估计多元振荡函数积分的方法.

重复应用定理16，我们还可以推出一个有趣的结果. 假设$f(x_1,y_1,\cdots,y_k)$是关于诸y_i具有周期为1的连续函数. 首先从下列积分开始：

$$I=\int_{V_{1+k}}\cdots\int f(x_1,y_1,\cdots,y_k)dx_1dy_1\cdots dy_k$$

我们将y_1换成N_1x_1，则按(2.41)式可得出

$$I=\int_{V_k}\cdots\int f(x_1,N_1x_1,y_2,\cdots,y_k)dx_1dy_2\cdots dy_k$$

$$+O\left[\omega\left(f;\ \frac{1}{N_1},\ 0,\ \cdots,\ 0\right)\right]$$

又再从上式的右端积分出发，同样地把 y_2 换作 $N_1N_2x_1$，并注意对函数

$$f(x_1, Nx_1, y_2, \cdots, y_k) = g(x_1, y_2, \cdots, y_k)$$

而言，连续模数之间存在着关系式

$$\omega\left(g;\ \frac{1}{N_1N_2},\ 0,\cdots,0\right) = O\left[\omega\left(f;\ \frac{1}{N_1N_2},\ \frac{1}{N_2},0,\cdots,0\right)\right]$$

$$= O\left[\omega\left(f;\ \frac{1}{N_1},\ \frac{1}{N_2},0,\cdots,0\right)\right]$$

则由(2.41)式又可得到

$$I = \int_{V_{k-1}}\cdots\int f(x_1, N_1x_1, N_1N_2x_1, y_3, \cdots, y_k)\,dx_1dy_3\cdots dy_k$$

$$+O\left[\omega\left(f;\ \frac{1}{N_1},\ \frac{1}{N_2},0,\cdots,0\right)\right]$$

仿此继续进行下去，最后我们便可得出

$$I = \int_0^1 f(x_1, N_1x_1, N_1N_2x_1, \cdots, N_1, N_kx_1)\,dx_1$$

$$+O\left[\omega\left(f;\ \frac{1}{N_1},\ \frac{1}{N_2},\ \cdots,\ \frac{1}{N_k},\ 0\right)\right]$$

记$\lambda_1 = N_1$，$\lambda_j = N_1N_2\cdots N_j$ $(1\leqslant j\leqslant k)$，则上述结果即可总结成如下的定理.

定理 17 设$f(x_1, y_1, \cdots, y_k)$是V_{k+1}上的连续函数，且对诸y_i具有周期1；又设参变量$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$是一组有着递增阶的无穷大变量，即$\lambda_1\to\infty$，$\lambda_j/\lambda_{j-1}\to\infty$ $(j=2,\ 3,\ \cdots,\ k)$，则我们有如下的关系式

$$\int_0^1 f(x, \lambda_1x, \lambda_2x, \cdots, \lambda_kx)\,dx$$

$$=\int_{V_{k+1}}\cdots\int f(x,y_1,y_2,\cdots,y_k)dV$$

$$+O\left[\omega\left(f;\frac{1}{\lambda_1},\frac{\lambda_1}{\lambda_2},\cdots,\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k},0\right)\right] \quad (2.47)$$

显然这个定理所包含的公式基本上解决了在本节开始第一段所提及的问题.事实上，根据公式(2.47)，可知于 $1\ll\lambda_1\ll\lambda_2\ll\cdots\ll\lambda_k$时，我们有

$$\int_0^1 f(x,\lambda_1x,\cdots,\lambda_kx)dx\approx\int_{V_{k+k}} f(x,y_1,\cdots,y_k)dV \quad (2.48)$$

而上式右端的多重积分当然可以利用通常的办法去进行近似计算.下面举两个较简单的例子.

例 1 设$f(x)$为$[a,b]$上的连续函数,$\theta>0$,$N_2\gg N_1\gg|b-a|$，则有下列近似式

$$\int_a^b f(x)\cos(2\theta\sin(N_1x)\sin(N_2x))dx$$

$$\approx(J_0(\theta))^2\int_a^b f(x)dx \quad (2.49)$$

其中$J_0(\theta)$为 0 阶的Bessel 函数.事实上，根据(2.47)或(2.48)易见(2.49)左端的积分近似于

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\theta\sin y_1\sin y_2)dy_1dy_2\int_a^b f(x)dx$$

$$\approx(J_0(\theta))^2\cdot\int_a^b f(x)dx$$

例 2 设$f(x)$于$[a,b]$上连续，又设$N_2\gg N_1\gg|b-a|$,$\alpha^2+\beta_2=1$，则由于

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\frac{(\alpha^2\cos^2\theta+\beta^2\cos^2\phi)d\theta d\phi}{\sqrt{(1-\alpha^2\sin^2\theta)(1-\beta^2\sin^2\phi)}}=\frac{\pi}{2}$$

故根据(2.48)即可得到如下的近似式：

$$\int_a^b f(x)\frac{\alpha^2\cos^2(N_1x)+\beta^2\cos^2(N_2x)}{\sqrt{(1-\alpha^2\sin^2(N_1x))(1-\beta^2\sin^2(N_2x))}}dx$$

$$\approx \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,dx \tag{2.50}$$

上面的两个例子表明了含有两个(或多个)大参数的激烈振动函数的积分，有时可用通常的定积分去逼近它们. 很显然，假如想去直接计算(2.49)与(2.50)左端的积分值，将是非常麻烦的.

§7. 含奇异因子的振荡积分的渐近展开公式

现在我们针对奇异型振荡积分

$$I=\int_0^1 x^{-\mu} f(x, \langle\lambda x\rangle)\,dx \qquad 0<\alpha<1 \tag{2.51}$$

建立渐近的展开公式. 此处$\langle\lambda x\rangle$表Nx的分数部分，λ是实的大参数.

为此，让我们先证明以下二个引理:

引理 1 设$0\leqslant y\leqslant 1$，$\lambda>0$. 又设$\varphi(x)$在区间[0, 1]上有连续导数$\varphi^{(\nu)}(x)(\nu=0,1,\cdots,r)$，$r\geqslant 1$. 则

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{[\lambda-y]}\varphi\left(\frac{k+y}{\lambda}\right)=\int_0^1\varphi(x)\,dx+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{1}{\nu!\,\lambda^{\nu}}\Big\{\overline{B}_\nu(y-\lambda)\varphi^{(\nu-1)}(1)$$

$$-B_\nu(y)\varphi^{(\nu-1)}(0)\Big\}-\frac{1}{r!\,\lambda^r}\int_0^1\overline{B}_r(y-\lambda x)\varphi^{(r)}(x)\,dx \tag{2.52}$$

式中和的上限$[\lambda-y]$表小于$\lambda-y$的最大整数；$\overline{B}_\nu(y)$是以1为周期的Bernoulli函数，$\overline{B}_\nu(y)=B_\nu(\langle y\rangle)$.

对式(2.52)中右端最后一个积分应用分部积分公式即可知引理是正确的.

同样地，我们还有

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{[\lambda-y]}\varphi\left(\frac{k+y}{\lambda}\right)=\int_{\frac{1}{\lambda}}^1\varphi(x)\,dx+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{1}{\nu!\,\lambda^{\nu}}\Big\{\overline{B}_\nu(y-\lambda)\varphi^{(\nu-1)}(1)$$

$$-B_\nu(y)\varphi^{(\nu-1)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\Bigg\}-\frac{1}{r!\lambda^r}\int_{\frac{1}{\lambda}}^{1}\overline{B}_r(y-\lambda x)\varphi^{(r)}(x)dx$$

(2.53)

引理 2 令r是正整数，$s>-r(s\neq 1)$，$0<y\leqslant 1$，则

$$\sum_{k=0}^{[\lambda-y]}\frac{1}{(k+y)^s}=\zeta(s,y)+\frac{\lambda^{1-s}}{1-s}$$

$$+\lambda^{1-s}\sum_{\nu=1}^{r}\binom{-s}{\nu-1}\frac{\overline{B}_\nu(y-\lambda)}{\nu\lambda^\nu}+\binom{-s}{r}\int_\lambda^\infty\overline{B}_r(y-x)x^{-s-r}dx$$

(2.54)

其中$\zeta(s,y)$ $(s>-r,\ s\neq 1,\ 0<y\leqslant 1)$为广义Riemann Zeta函数.

证 置$\varphi(x)=x^{-s}$，并设$0<y\leqslant 1$，则依公式(2.53)，得到

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{[\lambda-y]}\left(\frac{k+y}{\lambda}\right)^{-s}=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{-s}+\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{[\lambda-y]}\left(\frac{k+y}{\lambda}\right)^{-s}$$

$$=\lambda^{s-1}y^{-s}+\int_{\frac{1}{\lambda}}^{1}x^{-s}dx+\sum_{\nu=1}^{r}\binom{-s}{\nu-1}\frac{\overline{B}_\nu(y-\lambda)-B_\nu(y)\lambda^{\nu-1+s}}{\nu\lambda^\nu}$$

$$-\frac{1}{\lambda^r}\binom{-s}{r}\int_{\frac{1}{\lambda}}^{1}\overline{B}_r(y-\lambda x)x^{-s-r}dx$$

由此又有

$$\sum_{k=0}^{[\lambda-y]}\frac{1}{(k+y)^s}=y^{-s}-\frac{1}{1-s}-\sum_{\nu=1}^{r}\binom{-s}{\nu-1}\frac{B_\nu(y)}{\nu}$$

$$-\binom{-s}{r}\int_1^\infty\overline{B}_r(y-x)\,x^{-r-s}dx+\frac{\lambda^{1-s}}{1-s}+\lambda^{1-s}\sum_{\nu=1}^{r}\binom{-s}{\nu-1}\frac{\overline{B}_\nu(y-\lambda)}{\nu\lambda^\nu}$$

$$+\binom{-s}{r}\int_\lambda^\infty\overline{B}_r(y-x)x^{-r-s}dx \qquad (2.55)$$

现在设$S>1$，令$\lambda\to\infty$，得

$\zeta(s,y)=$

$$y^{-s}-\frac{1}{1-s}-\sum_{\nu=1}^{r}\binom{-s}{\nu-1}\frac{B_\nu(y)}{\nu}-\binom{-s}{r}\int_1^\infty\overline{B}_r(y-x)x^{-r-s}dx$$

(2.56)

注意，当$0<y\leqslant 1$，$s>-r(s\neq 1)$时，上式中最后的无穷积分是收敛的.因此，我们已经将原来的Riemann Zeta函数解析延拓到$0<y\leqslant 1$，$s>-r(s\neq 1)$.从而，得到了式(2.54)．证毕.

现在让我们再给出Euler-Maclaurin 求和公式的一个扩充形式.

设 $0<s<1$，$0<y\leqslant 1$，$\psi(x)=x^s\varphi(x)\in C^{r+1}([0,1])$.
则

$$\Phi(x)=\varphi(x)-\sum_{i=0}^{r}\frac{\psi^{(i)}(0)}{i!}x^{i-s}\in C_0^r([0,1])$$

从而由式(2.52)得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{[\lambda-y]}\Phi\left(\frac{k+y}{\lambda}\right)&=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{[\lambda-y]}\left\{\varphi\left(\frac{k+y}{\lambda}\right)\right.\\&\quad\left.-\sum_{i=0}^{r}\frac{\psi^{(i)}(0)}{i!}\left(\frac{k+y}{\lambda}\right)^{i-s}\right\}\\&=\int_0^1\varphi(x)\,dx-\sum_{i=0}^{r}\frac{1}{i+1-s}\frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!}\\&\quad+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\overline{B}_\nu(y-\lambda)}{\nu\lambda^\nu}\left\{\frac{\varphi^{(\nu-1)}(1)}{(\nu-1)!}-\sum_{i=0}^{r}\frac{\psi^{(i)}(0)}{i!}\binom{i-s}{\nu-1}\right\}\\&\quad-\frac{1}{r!\lambda^r}\int_0^1\overline{B}_r(y-\lambda x)\,\Phi^{(r)}(x)\,dx\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{[\lambda-y]}\varphi\left(\frac{k+y}{\lambda}\right)&=\int_0^1\varphi(x)\,dx+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\overline{B}_\nu(y-\lambda)}{\nu!\lambda^\nu}\varphi^{(\nu-1)}(1)\\&\quad+\sum_{i=0}^{r}\frac{\psi^{(i)}(0)}{i!}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-s+i+1}\left\{\sum_{k=0}^{[\lambda-y]}\frac{1}{(k+y)^{s-i}}\right.\\&\quad\left.-\frac{\lambda^{i+1-s}}{i+1-s}-\lambda^{i+1-s}\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\overline{B}_\nu(y-\lambda)}{\nu\lambda^\nu}\binom{i-s}{\nu-1}\right\}\\&\quad-\frac{1}{r!\lambda^r}\int_0^1\overline{B}_r(y-\lambda x)\,\Phi^{(r)}(x)\,dx\end{aligned}\tag{2.57}$$

再利用式(2.54)即得扩充的 Euler-Maclaurin 公式：

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{[\lambda-y]}\varphi\left(\frac{k+y}{\lambda}\right)=\int_0^1\varphi(x)\,dx+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\overline{B}_\nu(y-\lambda)}{\nu!\,\lambda^\nu}\varphi^{(\nu-1)}(1)$$

$$+\sum_{i=0}^{r}\frac{\psi^{(i)}(0)}{i!}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-s+i+1}\zeta(s-i,y)+R_r \qquad (2.58)$$

其中

$$R_r=\sum_{i=0}^{r}\frac{\psi^{(i)}(0)}{i!}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-s+i+1}\binom{i-s}{r}\int_\lambda^\infty\overline{B}_r(y-x)x^{i-s-r}dx$$

$$-\frac{1}{r!\,\lambda^r}\int_0^1\overline{B}_r(y-\lambda x)\,\Phi^{(r)}(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{\lambda^r}\int_1^\infty\overline{B}_r(y-\lambda x)\sum_{i=0}^{r}\frac{\psi^{(i)}(0)}{i!}\binom{i-s}{r}x^{i-s-r}dx$$

$$-\frac{1}{r!\,\lambda^r}\int_0^1\overline{B}_r(y-\lambda x)\,\Phi^{(r)}(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{r!\,\lambda^r}\int_1^\infty\overline{B}_r(y-\lambda x)\left[\sum_{i=0}^{r}\frac{\psi^{(i)}(0)}{i!}x^{i-s}\right]^{(r)}dx$$

$$-\frac{1}{r!\,\lambda^r}\int_0^1\overline{B}_r(y-\lambda x)\,\Phi^{(r)}(x)\,dx$$

或写成

$$R_r=\frac{1}{r!\,\lambda^r}\int_1^\infty\overline{B}_r(y-\lambda x)\,[\varphi(x)-\Phi(x)]^{(r)}dx$$

$$-\frac{1}{r!\,\lambda^r}\int_0^1\overline{B}_r(y-\lambda x)\,\Phi^{(r)}(x)\,dx$$

其中

$$\Phi(x)=\frac{x^{-s}}{r!}\int_0^1\psi^{(r+1)}(t)\,(x-t)^r dt$$

现在让我们证明下列的展开定理：

定理 18 设$F(x,y)$是单位方域$(0\leqslant x,y\leqslant 1)$上的二元连续函

数，关于变量 x 具有直至 r 阶的连续偏导数 $F^{(\nu,0)}(x,y)$ $(\nu=0,1,\cdots,r)$. 又设 $0<s<1$，并记

$$f(x,y)=x^{-s}F(x,y)$$

$$f_r(x,y)=\sum_{\nu=0}^{r}\frac{1}{\nu!}F^{(\nu,0)}(x,y)x^{\nu-s}$$

$$g_r(x,y)=f(x,y)-f_r(x,y)$$

则对于任意正数 λ 有下列展开式成立：

$$\int_0^1 f(x,\langle\lambda x\rangle)dx=\int_0^1 x^{-s}F(x,\langle\lambda x\rangle)dx$$

$$=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{1}{\nu!\lambda^{\nu}}\int_0^1\overline{B}_\nu(y-\lambda)f^{(\nu-1,0)}(1,y)dy$$

$$+\sum_{\nu=0}^{r}\frac{1}{\nu!\lambda^{\nu+1-s}}\int_0^1\zeta(s-\nu,y)F^{(\nu,0)}(0,y)dy$$

$$+\frac{1}{r!\lambda^r}\int_0^1 dy\int_1^{\infty}\overline{B}_r(y-\lambda x)f_r^{(r,0)}(x,y)dx$$

$$-\frac{1}{r!\lambda^r}\int_0^1 dy\int_0^1\overline{B}_r(y-\lambda x)g_r^{(r,0)}(x,y)dx \qquad (2.59)$$

证 因为

$$f(x,y)=x^{-s}F(x,y)=\sum_{i=0}^{r}\frac{F^{(i,0)}(0,y)}{i!}x^{i-s}+g_r(x,y)$$

故有

$$\int_0^1 x^{-s}F(x,\langle\lambda x\rangle)dx=\int_0^1 f(x,\langle\lambda x\rangle)dx$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} f\left(\frac{y}{\lambda},\{y\}\right)dy$$

$$=\frac{1}{\lambda}\int_0^1\sum_{k=0}^{[\lambda-y]}f\left(\frac{k+y}{\lambda},\ y\right)dy$$

(2.60)

但是，根据式(2.58)

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{[\lambda-y]} f\left(\frac{k+y}{\lambda},\ y\right)=\int_0^1 f(x,y)\,dx$$

$$+\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\overline{B}_\nu(y-\lambda)}{\nu!\lambda^\nu}f^{(\nu-1,0)}(1,y)$$

$$+\sum_{\nu=0}^{r}\frac{\zeta(s-\nu,y)}{\nu!\lambda^{\nu+1-s}}F^{(\nu,0)}(0,y)$$

$$+\frac{1}{r!\lambda^r}\int_1^\infty \overline{B}_r(y-\lambda x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^r[f(x,y)-g_r(x,y)]\,dx$$

$$-\frac{1}{r!\lambda^r}\int_0^1 \overline{B}_r(y-\lambda x)\,g_r^{(r,0)}(x,y)\,dx$$

将上式代入式(2.60)即得式(2.59). 证毕.

定理18可用于估值含奇异因子的振荡积分；它排除了被积函数出现奇点$x=0$所带来的困难. 定理18中的余项是简明的封闭型余项. 当被积函数在别处出现奇点，或者同时有若干个奇点时，也可以类似地处理.

附记 应该指出，本章§2，§4，§7三节的基本题材内容是本书著者原先所获结果形式的精化和扩充. 例如，基本引理中的不等式(2.6)的右端原有系数因子2，后改进为1. 又基本展开公式中的余项表示式原先只对$\lambda=N$(正整数)证明其成立. 后来证明它对一切实数λ均成立，如此等等. 有关细节请参阅王兴华、施咸亮、卢志康等人的工作(【92】，【93】，【103】，【104】及【89】).

第三章　具有代数精度的降维展开公式

如果我们把定积分叫做一维积分，把

$$\left[f(t)\right]_{t=a}^{t=b} \equiv f(b)-f(a)$$

看作是施加于$f(t)$的零维积分运算. 则Darboux 求积公式(见本章§1式(3.3))便可以看成是一个将一维积分近似地展开成零维积分的公式，或简称为降维展开公式. 由此公式使我们想到，应该存在着把高维积分近似地展开成低一维积分或者说将高维积分进行降维的可能性. 既然 Darboux 公式可以通过定积分的分部积分法建立起来，自然我们又想到，应该能够应用高维积分的分部积分公式(即 Gauss-Green-Ostrogradsky 公式的变形) 去建立高维积分的降维公式. 正是基于这一想法，本书著者之一[4],[5],[7] 在二十年前提出了一个把高维区域上的多重积分近似地化为低维区域上的若干积分之和的方法. 这个方法的基本思想是，把原来的被积函数乘以一个恰当的多项式，然后反复应用高维积分的分部积分公式，使得原被积函数在有界区域上的多重积分恰好能表现成若干个低一维的积分之和，而其误差余项能有任意予先指定的微小估值. 这个方法的主要优点是不受区域形状的限制，并能够借助于低维的数值积分公式去估值较高维积分的值. 方法的缺点是积分维数的降低只能一维一维地进行.

文献【1】中总结了本书著者之一在1980年以前有关降维展开方法的主要研究结果，特别是详述了降维展开的基本公式. 这一公式也是本书作者们近年来开展降维展开方法研究的出发点. 但是，除了引用某些必要内容之外，我们不准备在本书中一一复述

【1】中的结果.事实上，我们写作本书的动机之一乃是希望能借此机会总结《高维数值积分》[1]一书出版以来国内外有关降维方法研究的主要结果.本章主要从三方面叙述对【1】中介绍的降维方法的推广和改进. 首先，我们由基本降维展开公式出发，导出具有代数精度的降维展开公式. 并且在某些具体的范数意义下，给出了某些最优降维展开式的最小余项估值. 另外，对具有代数精度的降维展开式中的低维积分选用恰当精度的求积公式后，我们还得到与降维展开式的代数精度相当的边界型求积公式. 这类边界型求积公式不仅克服了第一章中用纯代数方法构造的边界型求积公式精度较低的缺点，而且针对某些特殊区域，从最优降维展开公式出发，还可以构造出具有最高代数精度和最少结点个数的“最优边界型求积公式”.

为了说明一般方法的实际使用过程，我们在本章中也给出了少量的具体实例及计算公式. 希望它们能引起数值计算工作者的兴趣，将来能构造出更多的有实用价值的公式来.

§1. Darboux 公式及其特殊形式

如前述，正是在Darboux公式导出过程的启发下，产生了本章中的把高维积分展开成低维积分的方法. 因此为了说清楚高维积分的降维展开法的思想，我们有必要追本求源，从定积分的Darboux公式谈起.

Darboux公式是1876年由法国数学家Darboux给出的一个很有用的关于解析函数的展开公式.熟知的Taylor 公式是它的简单特例.

设$f(z)$在点a到点z的联线上正规解析，又设$\phi(t)$为t的n次多项式. 于是对于$t(0\leqslant t\leqslant 1)$求微商可得

$$\frac{d}{dt}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu}(z-a)^{\nu}\phi^{(n-\nu)}(t)f^{(\nu)}(a+t(z-a))$$

$$= -(z-a)\phi^{(n)}(t)f'(a+t(z-a))$$
$$+(-1)^n(z-a)^{n+1}\phi(t)f^{(n+1)}(a+t(z-a))$$

注意$\phi^{(n)}(t)$为一常数，因而$\phi^{(n)}(t)\equiv\phi^{(n)}(0)$. 再在上列等式两端对 t 积分(从下限 0 积到上限 1)，便得到

$$\phi^{(n)}(0)[f(z)-f(a)]$$
$$=\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}(z-a)^{\nu}[\phi^{(n-\nu)}(1)f^{(\nu)}(z)-\phi^{(n-\nu)}(0)f^{(\nu)}(a)]$$
$$+(-)^n(z-a)^{n+1}\int_0^1\phi(t)f^{(n+1)}(a+t(z-a))dt \tag{3.1}$$

公式(3.1)即是 Darboux 公式，最早刊于法国“数学杂志”(Jour. de Math., 3(1876)).

例 1 设在公式(3.1)中取$\phi(t)=(t-1)^n$，则$\phi^{(n)}(0)=n!$，$\phi^{(n-\nu)}(1)=0(1\leqslant\nu\leqslant n)$，$\phi^{(n-\nu)}(0)=(1)^{\nu}n(n-1)\cdots(\nu+1)$，因而便得出Taylor展开式作为其特例，而余项恰好表现为熟知的Cauchy积分形式.

例 2 将公式(3.1)中的n替换成$2n$，并取$\phi(t)=t^n(t-1)^n$，则在所得的展开式中再令$n\to\infty$，便可获得如下的展开级数

$$f(z)-f(a)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu-1}(z-a)^{\nu}}{2^{\nu}\cdot\nu!}[f^{(\nu)}(z)+(-1)^{\nu-1}f^{(\nu)}(a)]$$

此处系假定所得的级数是收敛的 (亦即假定展开式的余项以零为极限).

无损一般性，可设$\phi(t)$的最高次项系数为 1，从而$\phi^{(n)}(0)==n!$. 我们再设$f(t)$为实变函数$F(t)$的不定积分，于是在公式(3.1)中令$a=0$，$z=1$便可获得如下的积分公式

$$\int_0^1 F(t)\,dt=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}}{n!}\Big[\phi^{(n-\nu)}(t)\ F^{(\nu-1)}(t)\Big]_{t=0}^{t=1}$$

$$+\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 \phi(t)\,F^{(n)}(t)\,dt \tag{3.2}$$

事实上，只须对(3.2)中的积分型余项相继进行n次分部积分，便可验证所述公式的正确性. 上述公式也可改写成更一般的形式(只须作适当的变量替换)

$$\int_a^b F(t)\,dt=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}}{n!}\Big[\phi^{(n-\nu)}(t)\,F^{(\nu-1)}(t)\Big]_{t=a}^{t=b}+R_n \tag{3.3}$$

其中余项R_n可记作

$$R_n=\frac{(-1)^n}{n!}\int_a^b \phi(t)\,F^{(n)}(t)\,dt \tag{3.4}$$

既然(3.3)可由分部积分法得出，故为了保证公式的成立，只须假定$F(t)$在区间$[a,b]$上具有连续的n级微商即可.

根据以上所述，易见公式(3.3)和(3.4)实际上可以理解成Darboux公式的积分形式. 虽然如此，公式(3.3)在数值积分方面的重要应用却还是到了1940年以后才为人们所注意(参阅Obreschkoff【39】，Микеладзе【70】

公式(3.3)有两个特点：第一，除余项不计外，它的右端是用被积函数及其导数在积分区间的端点值表现出来的，因此它是边界型求积公式. 如所知，这种公式在用于近似计算时，无需计算被积函数在区间内部点上的值. 第二，在近似计算中一般需要忽略的余项R_n是带有权函数$\phi(t)$的积分表达式(3.4). 这就容许人们对多项式$\phi(t)$作各种合适的选择，以便使误差泛函$R_n\equiv R_n(F)$能具有尽可能小的估值.

Euler-Maclaurin公式　在基本公式(3.3)中取$\phi(t)$为n阶的Bernoulli 多项式即得著名的Euler-Maclaurin公式

Petr公式　在基本公式(3.3)中取n为偶数$n=2m$，并取$\phi(t)=(t-a)^m(t-b)^m$，则由Leibniz计算高阶微商的法则，可得出

(3.3)的一个特例为

$$\int_a^b F(t)\,dt=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\binom{m}{\nu}}{\binom{2m}{\nu}}\frac{(b-a)^\nu}{\nu!}\Big[F^{(\nu-1)}(a)$$

$$+(-1)^{\nu-1}F^{(\nu-1)}(b)\Big]+R_m \qquad (3.5)$$

其中余项R_m由式(3.4)给出，应用积分中值定理还可将R_m写成

$$R_m=\frac{(-1)^m}{2^{m+1}}\left[\frac{m!}{(2m)!}\right]^2 F^{(2m)}(\xi)(b-a)^{2m+1} \quad (a\leqslant\xi\leqslant b)$$

边界型求积公式(3.5)是 Petr 1915年给出的. 如所知，它对定积分近似计算是很有用的.

Obreschkoff公式将公式 (3.3) 中 n 和$\phi(t)$分别取作$m+k$和$(a-t)^m(b-t)^k$，便可得到Obreschkoff 公式(参见式(3.70)). 这个公式的具体应用请参看本章§6及Xованский的著作【73】.

在Микеладзе的论文【71】及著作中,还讨论过基本公式(3.3)的别种特例.例如，可以在公式(3.3)中令$a=-1$，$b=1$，并取

$$\phi(t)=T_n(t)+1/2^{n-1}$$

其中$T_n(t)=2^{1-n}\cos(n\cos^{-1}t)$为熟知的 Чебышев多项式. 此时

$$\phi(1)=1/2^{n-2} \qquad \phi(-1)=(1+(-1)^n)/2^{n-1}$$

又根据$T_n(t)$所满足的微分方程

$$(1-t^2)T_n''(t)-tT_n'(t)+n^2T_n(t)=0$$

并由逐次微商可以验知下列等式成立：

$$\phi^{(n-\nu)}(-1)=(-1)^\nu\phi^{(n-\nu)}(1)$$

$$2^{n-1}\phi^{(n-\nu)}(1)=\frac{n^2}{1}\cdot\frac{n^2-1^2}{3}\cdots\frac{n^2-(n-\nu-1)^2}{2n-2\nu-1}$$

其中$\nu=1$，2，…，$n-1$.于是当n为偶数时，便可由(3.3)导出如下的一个特殊的边界型公式

$$\int_{-1}^{1} F(t)\,dt = F(1) + F(-1)$$

$$+ \sum_{\nu=2}^{n-1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{\nu}\nu!} \frac{\binom{2n-\nu-1}{\nu}}{\binom{n-1}{\nu}} [F^{(\nu-1)}(1)$$

$$+ (-1)^{\nu-1} F^{(\nu-1)}(-1)] - \frac{1}{2^{n-2}n!}\left[F^{(n-1)}(1) - F^{(n-1)}(-1)\right]$$

$$+ \left(\frac{n^2-2}{n^2-1}\right) \frac{F^{(n)}(\xi)}{2^{n-2}n!} \qquad (-1 \leqslant \xi \leqslant 1) \qquad (3.6)$$

综上可知，只须适当选取多项式 $\phi(t)$，便可从式(3.3)得到各种特殊而有用的边界型求积公式，这些公式都带着一个在实际计算中容许忽略的误差.

§2. 广义分部积分法则

记微分算子

$$D^{(m_1,\cdots,m_n)} = \frac{\partial^m}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \cdots \partial x_n^{m_n}}$$

其中诸 m_i 为非负整数. $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 称为微分算子 $D^{(m_1,\cdots,m_n)}$ 的阶数.特别，$D^{(0,\cdots,0,m_j,0,\cdots,0)} = (\partial/\partial x_j)^{m_j}$. 令 Λ 表示如下形式的常系数偏微分算子

$$\Lambda = \sum_{m \leqslant M} \lambda_{m_1,\cdots,m_n} \cdot D^{(m_1,\cdots,m_n)}$$

此处 $\lambda_{m_1,\cdots,m_n}$ 为常数系数，M 为和式中算子 $D^{(m_1,\cdots,m_n)}$ 的最高阶数，亦称为算子 Λ 的阶数.特别，如果 Λ 中各项 $D^{(m_1,\cdots,m_n)}$ 皆为偶数阶(或奇数阶)微分算子，则称 Λ 为偶性(或奇性)算子. 以下记 $X = (x_1, x_2, \cdots x_n)$，$dX = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$.

引理 设 $\Omega \subset E_n$ 为 n 维欧氏空间的有界闭区域，其边界 $S \equiv \partial\Omega$ 为分片光滑的曲面，又设 $F(X)$，$G(X) \in C^M(\Omega)$，M 为偶性(或

奇性）微分算子Λ的阶数，那末我们有下列形式的等式

$$\int_{\Omega} F\cdot\Lambda G dX-(-1)^{M}\int_{\Omega} G\cdot\Lambda F dX=\int_{\partial\Omega} W dS \qquad (3.7)$$

此处dS为$\partial\Omega$上的面元，W为由F与G的诸偏导数之积构成的线性组合，其中的每一项所含导数阶数之和均不超过$M-1$.

证 由于Λ为诸$D^{(m_1,\cdots,m_n)}$的线性组合，故只须就特例$\Lambda\equiv D^{(m_1,\cdots,m_n)}$验证即可，此时$M=m_1+m_2+\cdots+m_n$. 熟知有高维积分的 Gauss-Green-Ostrogradsky 公式

$$\int_{\Omega}\frac{\partial f(X)}{\partial x_i}dV=\int_{\partial\Omega} f(X)\frac{\partial x_i}{\partial\nu}dS \qquad (3.8)$$

其中$\partial x_i/\partial\nu$为坐标变量x_i对曲面$\partial\Omega$外法线的方向导数（也即单位外法线向量沿x_i坐标轴的方向余弦）.

在式(3.8)中代入$f(X)=F(X)\cdot G(X)$，则有

$$\int_{\Omega} F\frac{\partial G}{\partial x_i}dX=\int_{\partial\Omega} F\cdot G\frac{\partial x_i}{\partial\nu}dS-\int_{\Omega} G\frac{\partial F}{\partial x_i}dX \qquad (3.9)$$

这就是高维积分的分部积分公式. 逐次应用这个公式，即不难导出

$$\int_{\Omega} F\cdot D^{(m_1,\cdots,m_n)}G dX$$

$$=\sum_{k=0}^{m_1-1}(-1)^{k}\int_{\partial\Omega} D^{(k,0,\cdots,0)}F\cdot D^{(m_1-k-1,m_2,\cdots,m_n)}G\frac{\partial x_1}{\partial\nu}dS$$

$$+\sum_{k=0}^{m_2-1}(-1)^{m_1+k}\int_{\partial\Omega} D^{(m_1,0,\cdots,0)}F$$

$$\cdot D^{(0,m_2-k-1,m_3,\cdots,m_n)}G\frac{\partial x_2}{\partial\nu}dS+\cdots$$

$$+\sum_{k=0}^{m_n-1}(-1)^{m_1+\cdots+m_{n-1}+k}\int_{\partial\Omega} D^{(m_1,\cdots,m_{n-1},k)}F$$

$$\cdot D^{(0,\cdots,0,m_n-k-1)}G\frac{\partial x_n}{\partial \nu}dS$$

$$+(-1)^M\int_\Omega G\cdot D^{(m_1,\cdots,m_n)}FdX \qquad (3.10)$$

这表明了我们能有形如(3.7)的等式，其中右端积分中的W含有$M=m_1+\cdots+m_n$个项，每项都是展布在曲面$S=\partial\Omega$上的积分，而被积函数中F与G的偏导数阶数之和为$M-1$.

鉴于(3.7)左端出现的两个被积函数$F\cdot\Lambda G$与$G\cdot\Lambda F$中的F，G两者的地位具有对称性，故广义分部积分公式(3.7)亦可称为"对称法则". 按此法则，微分算子Λ可以在F，G之前互相转移，两者的积分之和(Λ为偶性时)或差(Λ为奇性时)可表为降维展开$\int_{\partial\Omega}WdS$.

例 1 设$n=3$，$\Lambda=D^{(m,m,m)}=\partial^{3m}/\partial x^m\partial y^m\partial z^m$，$F(x,y,z)$，$G(x,y,z)\in C^{3m}(\Omega)$，$\Omega\subset E_3$. 这就相当于在(3.10)中令$n=3$，$M=3m$，$m_1=m_2=m_3=m$，故得

$$\int_\Omega F\cdot D^{(m,m,m)}Gdxdydz-(-1)^{3m}\int_\Omega G\cdot D^{(m,m,m)}Fdxdydz$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\int_{\partial\Omega}D^{(k,0,0)}F\cdot D^{(m-k-1,m,m)}Gdydz$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m+k}\int_{\partial\Omega}D^{(m,k,0)}F\cdot D^{(0,m-k-1,m)}Gdzdx$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{2m+k}\int_{\partial\Omega}D^{(m,m,k)}F\cdot D^{(0,0,m-k-1)}Gdxdy$$

$$(3.11)$$

若选G为$x^my^mz^m$项系数为1的$3m$次三元多项式，则可以得到一个齐次降维展开式

$$\int_\Omega Fdxdydz=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{(m!)^3}\int_{\partial\Omega}D^{(k,0,0)}F\cdot D^{(m-k-1,m,m)}Gdydz$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^{m+k}}{(m!)^3}\int_{\partial\Omega}D^{(m,k,0)}F\cdot D^{(0,m-k-1,m)}Gdzdx$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^{2m+k}}{(m!)^3}\int_{\partial\Omega}D^{(m,m,k)}F\cdot D^{(0,0,m-k-1)}Gdxdy+\rho_m$$

(3.12)

$$\rho_m=\frac{(-1)^{3m}}{(m!)^3}\int_\Omega G\cdot D^{(m,m,m)}Fdxdydz$$

这是因为，当F为形如

$p(x,y,z)=ax^m(yz)^{m-1}+by^m(xz)^{m-1}+cz^m(xy)^{m-1}+$ 较低次项的多项式时，式(3.12)的余项$\rho_m=0$.

如果依次关于变量x，y，z应用式(3.9)，并重复这一过程，则可得出【1】第十三章的齐次降维展开式(32)：

$$\int_\Omega Fdxdydz=\frac{1}{(m!)^3}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{3k}\int_{\partial\Omega}[D^{(k,k,k)}F$$

$$\cdot D^{(m-k-1,m-k-1,m-k-1)}G''_{yz}dydz$$

$$-D^{(k,k,k)}F'_xD^{(m-k-1,m-k-1,m-k-1)}G_z'dzdx$$

$$+D^{(k,k,k)}F''_{xy}D^{(m-k-1,m-k-1,m-k-1)}Gdxdy]+\rho_m$$

(3.13)

$$\rho_m=\frac{(-1)^{3m}}{(m!)^3}\int_\Omega G\cdot D^{(m,m,m)}Fdxdydz$$

其中G仍为$x^my^mz^m$项系数为 1 的$3m$次三元多项式. 比较式(3.12)和(3.13)，可以看出它们实质上是彼此相等的. 只是由于运用分部积分公式(3.9)的方式不同而出现了形式上的差别. 但是，前一种处理方法更为灵活，借助于它我们可以导出具有各种代表精度的降维展开公式.

§3. 具有代数精度的降维展开公式

设$\Omega\equiv V_n$是n维欧氏空间中的一个有界闭区域，它的$n-1$维

边界曲面S_{n-1}是由参数方程组界定，或者在特别情形下，可以假设它具有方程

$$\Phi(x_1,\cdots,x_n)=0 \tag{3.14}$$

此处对V_n中的点而言，恒有$\Phi\leqslant 0$，并设Φ对各个变量而言都有连续的偏导数.

设$F(X)=F(x_1,\cdots,x_n)$和$G(X)=G(x_1,\cdots,x_n)$在V_n上连续可微，则依式(3.9)可得

$$\int_{V_n} F\frac{\partial G}{\partial x_n}dV=\int_{S_{n-1}} F\cdot G\frac{\partial x_n}{\partial \nu}dS-\int_{V_n} G\frac{\partial F}{\partial x_n}dV \tag{3.15}$$

若函数$F(X)\equiv F(x_1,\cdots,x_n)$及$G(X)\equiv G(x_1,\cdots,x_n)$关于变量$x_n$具有$m$阶连续偏导数($m\geqslant 1$). 又设$G(X)$为如下形式

$$G(X)=x_n^m+Q(x_1,\cdots,x_{n-1})x_n^{m-1}+x_n\text{的低次项} \tag{3.16}$$

逐次利用(3.15)(相当于在(3.10)式中取$\Lambda\equiv D^{(0,\cdots,0,m)}$，可得如下的公式

$$\int_{V_n} F(X)dV=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{m!}\int_{S_{n-1}} L_k(F,G)dS+\rho_m \tag{3.17}$$

其中

$$L_k(F,G)\equiv\left(\frac{\partial^k F}{\partial x_n^k}\right)\left(\frac{\partial^{m-k-1}G}{\partial x_n^{m-k-1}}\right)\left(\frac{\partial x_n}{\partial \nu}\right)$$

而余项ρ_m可以表示成

$$\rho_m=\frac{(-1)^m}{m!}\int_{V_n}\left(\frac{\partial^m F}{\partial x_n^m}\right)G(X)dV \tag{3.18}$$

若舍弃余项ρ_m，由(3.17)式可得下列近似关系式

$$J=\int_{V_n} F(X)dV$$

$$\approx\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\int_{S_{n-1}}\frac{\partial^k F}{\partial x_n^k}\ \frac{\partial^{m-k-1}G}{\partial x_n^{m-k-1}}\ \frac{\partial x_n}{\partial\nu}dS \tag{3.19}$$

(3.19)就是计算积分J的一个近似降维展开式，简称降维展开式. 式(3.19)中共含有m项，因此是含m项的降维展开式.

有时V_n的边界曲面S_{n-1}是由一组参数方程

$$x_i=x_i(t_1,\cdots,t_{n-1}),\qquad i=1,\ \cdots,\ n$$

所确定. 这时就可直接将(3.17)的右端积分表示成通常的$n-1$维积分. 特别是，若x_n能从式(3.14)中解出，而V_n可由下列条件定义：

$$\Phi_1(x_1,\cdots,x_{n-1})\leqslant x_n\leqslant\Phi_2(x_1,\cdots,x_{n-1})$$
$$(x_1,\cdots,x_{n-1})\in V_{n-1}$$

其中Φ_1与Φ_2为单值连续函数，则基本公式(3.17)可以更简单地表示成

$$\int_{V_n}F(X)\,dV_n=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{m!}\int_{V_{n-1}}\left[\frac{\partial^k F\partial^{m-k-1}G}{\partial x_n^k\partial x_n^{m-k-1}}\right]_{x_n=\Phi_1}^{x_n=\Phi_2}dV_{n-1}+\rho_m \tag{3.20}$$

其中$dV_n=dx_1\cdots dx_n$，而

$$\Big[g(X)\Big]_{x_n=\Phi_1}^{x_n=\Phi_2}=g(x_1,\cdots,x_{n-1},\Phi_2)-g(x_1,\cdots,x_{n-1},\Phi_1)$$

公式(3.20)的意义在于表明有界区域V_n上的n重积分能利用V_{n-1}上的一串$n-1$重积分近似地表示出来，而余项ρ_m有着形如(3.18)的表达式.

显然Darboux的基本公式(3.3)实际上是公式(3.17)和(3.20)在$n=1$时的特例.

采用范数记号

$$\|f\|_C=\max_{X\in V_n}|f(X)|$$

$$\|f\|_{L_1}=\int_{V_n}|f(X)|dV$$

$$\|f\|_{L_2}=\left(\int_{V_n}|f(X)|^2dV\right)^{\frac{1}{2}}$$

由余项公式(3.18)可知ρ_m有以下三种最简单的估计

$$|\rho_m|\leqslant\frac{1}{m!}\left\|\frac{\partial^m F}{\partial x_n^m}\right\|_C\left\|G(X)\right\|_{L_1} \tag{3.21}$$

$$|\rho_m|\leqslant\frac{1}{m!}\left\|\frac{\partial^m F}{\partial x_n^m}\right\|_{L_2}\left\|G(X)\right\|_{L_2} \tag{3.22}$$

$$|\rho_m|\leqslant\frac{1}{m!}\left\|\frac{\partial^m F}{\partial x_n^m}\right\|_{L_1}\left\|G(X)\right\|_C \tag{3.23}$$

其中(3.22)是利用Буняковсий-Schwarz不等式得出的.

形如(3.16)式的函数可以有很多，从中选择怎样的函数作$G(X)$呢？我们认为选取辅助函数$G(X)$应有三条原则. 一是要求使得降维展开式的余项ρ_m有尽可能小或较小的估值. 为了得到尽可能小的余项估值，由(3.21)—(3.23)易看出，须分别寻求辅助多项式$\widetilde{G}(X)$，它分别是下述极小值问题的解：

$$\int_{V_n}|\widetilde{G}(X)|dV=\inf_G\int_{V_n}|G(X)|dV$$

$$\int_{V_n}|\widetilde{G}(X)|^2dV=\inf_G\int_{V_n}|G(X)|^2dV$$

$$\|\widetilde{G}(X)\|_C=\inf_G\|G(X)\|_C$$

此处各个infimum系对一切合于形式(3.16)的多项式G所取.

选择函数$G(X)$的第二条原则是要求降维展开$\int_{\partial\Omega}WdS$中的W的项数不要太多，结构形式不要太复杂. 三是要求降维展开式具有尽可能高的代数精度.

一般说来，余项$|\rho_m|$的“极小化问题”是很难解决的，只是对很特殊的一些区域才可能求得满足极小化要求的辅助函数

$G(X)$(见§3). 所以，通常只能在考虑到后两条原则的情况下，适当照顾到第一条原则.

我们将给出辅助函数$G(X)$的一种选择，它能使含m项的降维展开式具有 $2m-1$次代数精度.

在式(3.20)，设Φ_1，Φ_2为光滑函数，V_{n-1}为有界单连通闭区域. 则可选取$G(X)$为

$$G(X)=\frac{m!}{(2m)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m\{(x_n-\Phi_1(x_1,\cdots,x_{n-1}))^m$$

$$\cdot(x_n-(\Phi_2(x_1,\cdots,x_{n-1}))^m\} \qquad (3.24)$$

按x_n的降幂展开，不难验证式(3.24)所表示的$G(X)$符合(3.16)的形式.

定理 1 设$F(X)\in C^{2m}(V_n)$. 则选取$G(X)$如式(3.24)的降维展开式(3.20)具有$2m-1$次代数精度.

证 考察余项

$$\rho_m=\frac{(-1)^m}{m!}\int_{V_n}\frac{\partial^m F}{\partial x_n^m}G(X)\,dV$$

$$=\frac{(-1)^m}{(2m)!}\int_{V_n}\frac{\partial^m F}{\partial x_n^m}\frac{\partial^m}{\partial x_n^m}\{(x_n-\Phi_1(x_1,\cdots,x_{n-1}))^m$$

$$\cdot(x_n-\Phi_2(x_1,\cdots,x_{n-1}))^m\}dV$$

应用广义分部积分公式(3.7)，这里把$\partial^m F/\partial x_n^m$看作式(3.7)中的$F$，把$\{(x_n-\Phi_1(x_1,\cdots,x_{n-1}))^m(x_n-\Phi_2(x_1,\cdots,x_{n-1}))^m\}$看作$G$，并且

$$\Lambda=\partial^m/\partial x_n^m$$

则不难验证相应的降维展开项

$$\int_{S_{n-1}}W\,dS=0$$

故得

$$\rho_m = (-1)^m \frac{(-1)^m}{(2m)!} \int_{V_n} \left\{ \frac{\partial^m}{\partial x_n^m} \left(\frac{\partial^m}{\partial x_n^m} F \right) \right\} \{ (x_n - \Phi_1(x_1, \cdots, x_{n-1}))^m$$

$$\cdot (x_n - \Phi_2(x_1, \cdots, x_{n-1}))^m \} dV$$

$$= \frac{1}{(2m)!} \int_{V_n} \frac{\partial^{2m} F}{\partial x_n^{2m}} \{ (x_n - \Phi_1(x_1, \cdots, x_{n-1}))^m$$

$$\cdot (x_n - \Phi_2(x_1, \cdots, x_{n-1}))^m \} dV \qquad (3.25)$$

用任意的次数不超过$2m-1$的n元多项式代入(3.25)式中的$F(X)$，得$\rho_m = 0$. 此即证得式(3.20)具有$2m-1$次的代数精度.

定理 2 设$F(X) \in C^{2m}(V_n)$. 则选取$G(X)$如(3.24)的降维展开式(3.20)的余项ρ_m具有下列估计

$$|\rho_m| \leqslant \frac{1}{(2m)!} \left\| \frac{\partial^{2m} F}{\partial x_n^{2m}} \right\|_{L_n} \Big\| (x_n - \Phi_1(x_1, \cdots, x_{n-1}))^m$$

$$\cdot (x_n - \Phi_2(x_1, \cdots, x_{n-1}))^m \Big\|_{L_2} \qquad (3.26)$$

$$|\rho_m| \leqslant \frac{1}{(2m)!} \left\| \frac{\partial^{2m} F}{\partial x_n^{2m}} \right\|_{C} \Big\| (x_n - \Phi_1(x_1, \cdots, x_{n-1}))^m$$

$$\cdot (x_n - \Phi_2(x_1, \cdots, x_{n-1}))^m \Big\|_{L_1} \qquad (3.27)$$

$$|\rho_m| \leqslant \frac{1}{(2m)!} \left\| \frac{\partial^{2m} F}{\partial x_n^{2m}} \right\|_{L_1} \Big\| (x_n - \Phi_1(x_1, \cdots, x_{n-1}))^m$$

$$\cdot (x_n - \Phi_2(x_1, \cdots, x_{n-1}))^m \Big\|_{C} \qquad (3.28)$$

$$|\rho_m| \leqslant \left[\frac{1}{(4m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \left\| (x_n - \Phi_1(x_1, \cdots, x_{n-1}))^{2m} \right\|_{L_2} \left\| \frac{\partial^{2m} F}{\partial x_n^{2m}} \right\|_{L_2}$$

$$(3.29)$$

证 式(3.26)—(3.28)是显然的. 往证式(3.29). 由式(3.25)，利用熟知的Schwarz不等式可得

$$|\rho_m| \leqslant \frac{1}{(2m)!} \left\| \frac{\partial^{2m} F}{\partial x_n^{2m}} \right\|_{L_2} \cdot$$

$$\cdot\left(\int_{V_n}(x_n-\Phi_1(x_1\cdots,x_{n-1}))^{2m}(x_n-\Phi_2(x_1,\cdots,x_{n-1}))^{2m}dV\right)^{\frac{1}{2}}$$

再利用广义分部积分公式，得到

$$\int_{V_n}(x_n-\Phi_1(x_1,\cdots,x_{n-1}))^{2m}(x_n-\Phi_2(x_1,\cdots,x_{n-1}))^{2m}dV$$

$$=\int_{V_n}(x_n-\Phi_1(x_1,\cdots,x_{n-1}))^{2m}$$

$$\cdot\frac{(2m)!}{(4m)!}\frac{\partial^{2m}}{\partial x_n^{2m}}(x_n-\Phi_1(x_1,\cdots,x_{n-1}))^{4m}dV$$

$$=\frac{(2m)!}{(4m)!}(2m)!\int_{V_n}(x_n-\Phi_1(x_1,\cdots,x_{n-1}))^{4m}dV$$

因此，最后得出

$$|\rho_m|\leqslant\frac{1}{(2m)!}\left\|\frac{\partial^{2m}F}{\partial x_n^{2m}}\right\|_{L_2}$$

$$\cdot\left(\int_{V_n}\frac{(2m)!}{(4m)!}(2m)!(x_n-\Phi_1(x_1,\cdots,x_{n-1}))^{4m}dV\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\frac{1}{(4m)!}\right]^{\frac{1}{2}}\left\|(x_n-\Phi_1(x_1,\cdots,x_{n-1}))^{2m}\right\|_{L_2}\left\|\frac{\partial^{2m}F}{\partial x_n^{2m}}\right\|_{L_2}$$

证毕.

在§4中，我们还将根据不同的区域给出余项ρ_m的更精细的估计.

由于受到Gröbner (1948【84】)工作的启示，书【1】第四章§2中，针对球域σ $(x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1)$及单纯形域$T_n(x_i\geqslant 0,x_1+\cdots+x_n\leqslant 1)$上的积分，分别选用Hermite-Diden多项式

$$U_m(X)=\frac{m!}{(2m)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m(x_1^2+\cdots+x_n^2-1)^m \quad (3.30)$$

和广义Appell多项式

$$Q_m(X)=\frac{m!}{(2m)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m[x_n^m(x_1+\cdots+x_n-1)^m]$$

(3.31)

作为辅助多项式，并得到某种意义下余项估值为最小的降维展式．今指出，如此获得的降维展开式还是m项并具有$2m-1$次代数精度的．事实上，由定理 1 及定理 2 可得下述结果．

定理 3 设$F(X)$为球域σ $(x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1)$上的连续函数，且对$x_n$有 $2m$ 级的连续偏导数．则我们有如下的m项 $2m-1$次代数精度的降维展开式

$$\int_\sigma F(X)\,dV=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{m!}\int_{S_{n-1}}L_k(F(X),U_m(X))dS+\rho_m$$

(3.32)

其中$L_k(\cdot,\cdot)$的定义如式(3.17)．而余项ρ_m有如下估值

$$|\rho_m|\leqslant\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}\cdot m!}{\Gamma\left(m+\frac{n}{2}+1\right)(2m)!}\left\|\frac{\partial^{2m}F}{\partial x_n^{2m}}\right\|_C \qquad (3.33)$$

或

$$|\rho_m|\leqslant\left(\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(2m+\frac{n}{2}+1\right)(2m)!}\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\frac{\partial^{2m}F}{\partial x_n^{2m}}\right\|_{L_2}$$

(3.34)

证 由式(3.27)，(3.26)及

$$\int_\sigma(1-(x_1^2+\cdots+x_n^2))^m dV=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}m!}{\Gamma\left(m+\frac{n}{2}+1\right)}$$

可知定理 3 为真．

定理 4 设$F(X)$为单纯形区域$T_n(x_i\geqslant 0, x_1+\cdots+x_n\leqslant 1)$上的连续函数，且对$x_n$具有 $2m$ 阶连续偏导数．则成立着如下m项

$2m-1$ 次代数精度的降维展开公式

$$\int_{T_n} F(X)dV=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{m!}\int_{S_{n-1}} L_k(F(X),Q_m(X))dS+\rho_m \tag{3.35}$$

其中$L_k(\cdot,\cdot)$定义如式(3.17). 而余项ρ_m有如下估值

$$|\rho_m|\leqslant\frac{m!m!}{(2m+n)!(2m)!}\left\|\frac{\partial^{2m}F}{\partial x_n^{2m}}\right\|_C \tag{3.36}$$

或

$$|\rho_m|\leqslant\left(\frac{1}{(4m+n)!}\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\frac{\partial^{2m}F}{\partial x_n^{2m}}\right\|_{L_2} \tag{3.37}$$

证 由式(3.26), (3.27), 及

$$\int_{T_n} x_n^m\left(1-\sum_{i=1}^n x_i\right)^m dV=\frac{m!m!}{\Gamma(2m+n+1)}$$

可知定理4为真.

定理3及4中的余项估值显然较【1】第四章§2 中的相应结果更细致.

一般地, 假设V_n的边界曲面S_{n-1}的方程具有形式

$$\Phi(x_1,\cdots,x_n)\equiv x_n^2+gx_n+h=0$$

其中$g=g(x_1,\cdots,x_{n-1})$与$h=h(x_1,\cdots,x_{n-1})$是诸变量x_i的分片可微的函数. 而V_n中的点皆合条件$\Phi\leqslant0$(注意上述的$\Phi=0$有时可能只给出边界S_{n-1}的一部分,而其余部分是由坐标平面,例如$x_1=0$, $\cdots$, $x_{n-1}=0$, 构成的). 则可定义辅助函数$G(X)$为

$$G(X)=\frac{m!}{(2m)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m(\Phi(x_1,\cdots,x_n))^m \tag{3.38}$$

完全类似地, 我们有下述定理

定理 5 设$G(X)$由式(3.38)所定义, $\Phi=0$表V_n的边界曲面方程, V_n中的点皆合$\Phi\leqslant0$, 则m项降维展开式(3.17)具有

$2m-1$ 次代数精度，且有余项估计

$$|\rho_m| \leqslant \frac{1}{(2m)!}\left\|\frac{\partial^{2m}F}{\partial x_n^{2m}}\right\|_{L_2}\left\|\Phi(x_1,\cdots,x_n))^m\right\|_{L_2}$$

(3.39)

或

$$|\rho_m| \leqslant \frac{1}{(2m)!}\left\|\frac{\partial^{2m}F}{\partial x_n^{2m}}\right\|_{C}\left\|(\Phi(x_1,\cdots,x_n))^m\right\|_{L_1}$$

(3.40)

再举两个应用实例.

例 1 对于半球域 $\Omega\ (0\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-x^2-y^2})$，可令辅助函数 $G(X)$ 为

$$G(X)=\frac{m!}{(2m)!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^m\{z^m\cdot(z-\sqrt{R^2-x^2-y^2})^m\}$$

即可得到上半球域Ω上的 m 项 $2m-1$ 次代数精度的降维展开公式

$$\int_\Omega F(x,y,z)\,dxdy\,dz\approx\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\int_S\frac{\partial^k F}{\partial z^k}\ \frac{\partial^{m-k-1}G}{\partial z^{m-k-1}}dxdy$$

(3.41)

其余项ρ_m具有下列估计

$$|\rho_m|\leqslant\left(\frac{1}{(4m)!}\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\frac{\partial^{2m}F}{\partial z^{2m}}\right\|_{L_2}\left(\int_\Omega z^{4m}dxdydz\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{2\pi R^{4m+3}}{(4m+1)!\,(4m+3)}\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\frac{\partial^{2m}F}{\partial z^{2m}}\right\|_{L_2}$$

例 2 对于圆柱域 $\Omega(x^2+z^2\leqslant R^2,\ a\leqslant y\leqslant b)$，可令辅助函数 $G(X)$ 为

$$G(X)=\frac{m!}{(2m)!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^m\{(x^2+z^2-R^2)^m\}$$

即可得到圆柱域Ω上的 m 项 $2m-1$ 次代数精度的降维展开式

$$\int_{\Omega} F(x,y,z)\,dx dy\,dz \approx \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k \int_S \frac{\partial^k F}{\partial z^k}\ \frac{\partial^{m-k-1} G}{\partial z^{m-k-1}}\,dx dy$$

其余项 ρ_m 有下述估计

$$|\rho_m| \leqslant \frac{1}{(2m)!}\left\|\frac{\partial^{2m}F}{\partial z^{2m}}\right\|_{L_2}\left(\int_{\Omega}(x^2+z^2-R^2)^{2m}dx dy dz\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{(2m)!}\left(\frac{\pi(b-a)R^{4m+2}}{2m+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\frac{\partial^{2m}F}{\partial z^{2m}}\right\|_{L_2}$$

§4.具有代数精度的降维展式的最小余项估值

在本节中，我们针对某些特殊区域来讨论具有代数精度的降维展开公式的最小余项估值问题.

由式(3.7)可得如下降维展开公式

$$\int_{\Omega} F(X)\,\Lambda G(X)\,dX \approx \int_{\partial\Omega} W(X)\,dS \qquad (3.42)$$

式(3.42)略去的余项为

$$\rho_M = (-1)^M \int_{\Omega} G(X)\,\Lambda F(X)\,dX \qquad (3.43)$$

这里仍记$\Omega\subset E_n$为n维欧氏空间的有界闭区域，其边界 $\partial\Omega$ 为分片光滑的曲面．特别在$n=2$ 时，Ω的边界$\partial\Omega=C$为可求长的简单闭曲线.

根据§2中指出的选择辅助多项式 $G(X)$ 的原则，我们提出问题：如何选取 $G(X)$ 致使$|\rho_M|$有尽可能小的估值？为便于探讨，不失一般性地，我们可令

$$\Lambda = D^{(m_1,\cdots,m_n)} \qquad M=\sum_{i=1}^{n} m_i$$

为了使 $G(X)$ 从多项式类选取，下面考虑几个常用的多项式类(其中常记$M=m_1+\cdots+m_n$)：

H_M^n表示次数不超过M的n元多项式集合，特别，简记 $H_M=$

H_M^l.

$P_n^{(m_1,\cdots,m_n)}$表示这样一个n元多项式类，其中每个多项式的次数不超过M，并且$x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}$一项的系数是1.

$K_n^{(m_1,\cdots,m_n)}$表示这样一个类，其中每个多项式可表为

$$G(X)=x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}+\sum_{i_1\cdots i_n}a_{i_1\cdots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$$

$$0\leqslant i_1,\cdots,i_n\leqslant M-1 \qquad 0\leqslant i_1+\cdots+i_n\leqslant M-1$$

$H^{(m_1,\cdots,m_n)}$表示这样一个类，其中各个多项式$Q(X)$可表为

$$Q(X)=x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}+\sum_{i_1\cdots i_n}a_{i_1\cdots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$$

$$0\leqslant i_k\leqslant m_k,\ k=1,\cdots n \quad 0\leqslant i_1+\cdots+i_n\leqslant M-1$$

显然上述多项式类之间有如下的包含关系

$$H_{m_1}(x_1)H_{m_2}(x_2)\cdots H_{m_n}(x_n)\subset H^{(m_1,\cdots,m_n)}\subset K_n^{(m_1,\cdots,m_n)}$$
$$\subset P_n^{(m_1,\cdots,m_n)}\subset H_M^n\subset C^M$$

上式左端为乘积集合，右端C^M为具有连续的M阶混合偏导数的n元函数类.

如将(3.42)，(3.43)中的$G(X)$取作$P_n^{(m_1,\cdots,m_n)}$中的多项式，则可得近似降维展开公式

$$\int_\Omega F(X)dX\approx\frac{1}{m_1!\cdots m_n!}\int_{\partial\Omega}W(X)dS \qquad (3.44)$$

其中

$$W(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{m_i-1}(-1)^{m_1+\cdots+m_{i-1}+k}D^{(m_1,\cdots,m_{i-1},k,0,\cdots,0)}F(X)$$
$$\cdot D^{(0,\cdots,0,m_i-k-1,m_{i+1},\cdots,m_n)}G(X)\frac{\partial x_i}{\partial\nu} \qquad (3.45)$$

$\partial x_i/\partial\nu$为坐标变量x_i对曲面$\partial\Omega$外法线的方向导数. 式(3.44)略去的余项是

$$\rho_M = \frac{(-1)^M}{m_1!\cdots m_n!}\int_\Omega G(X) D^{(m_1,\cdots,m_n)} F(X) dX$$

(3.46)

容易看出，降维展开式(3.44)具有 $M-1$ 次代数精度．实际上，它对如下的n元多项式函数$F(X)$而言是精确的：

$$F(X) = \sum_{i_1\cdots i_n}{}' a_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n} \quad (i_1+\cdots+i_n \leqslant M)$$

其中 $\sum'$ 表示求和中去掉 $i_1=m_1, \cdots, i_n=m_n$ 的那一项．

同§3中的分析结果相类比，在引进C模、L_1模和L_2 模以后，可知余项(3.46)有如下三种估值方式

$$|\rho_M| \leqslant \frac{1}{m_1!\cdots m_n!}\|\Lambda F\|_{L_1}\|G\|_C \tag{3.47}$$

$$|\rho_M| \leqslant \frac{1}{m_1!\cdots m_n!}\|\Lambda F\|_C\|G\|_{L_1} \tag{3.48}$$

$$|\rho_M| \leqslant \frac{1}{m_1!\cdots m_n!}\|\Lambda F\|_{L_2}\|G\|_{L_2} \tag{3.49}$$

由此，只须在一些多项类中找出C，L_1，L_2范数下的最小估值，也就可以得到相应意义下的ρ_M的最小估值．相应地当降维展开式中的辅助函数 $G(X)$ 取为某种极值函数(多项式)时，得到的最优降维展开公式就可用作构造具有代数精度的最优边界型求积公式的一种工具．

对一般高维区域Ω，最小零偏差多项式的显式表示问题是个很难解决的问题．但对几种特殊区域已有一些具体结果．这里将利用【3】中的一些结果来得出ρ_M的最小估值．【3】中已证明：假设Ω是 n 维空间中的方体域 $V_n(-1\leqslant x_i\leqslant 1,\ i=1,\cdots,n)$，则在此区域$V_n$上，函数类 $K_n^{(m_1,\cdots,m_n)}$上的最小零偏差多项式为

$$A_{m_1,\cdots,m_n}(X) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m_i}\left(x_i + \cos\frac{2k-1}{2m_i}\pi\right)$$

且其最小零偏差是2^{-M+n}，于是将此结果应用于式(3.47)可立得下述

定理 6 假设$\Omega=V_n$，$F(X)\in C^{(m_1,\cdots,m_n)}(\Omega)$. 则在多项类$K_n^{(m_1,\cdots,m_n)}$上当$G(X)$取为$A_{m_1,\cdots,m_n}(X)$时，便得到$V_n$上的一个最优降维展开公式(3.44)，且由式(3.46)得到余项ρ_M的最小估值为

$$|\rho_M|\leqslant\frac{1}{2^{M-n}m_1!\cdots m_n!}\|\Lambda F\|_{L_1} \tag{3.50}$$

由于在三角形区域$\Delta(x\geqslant-1,\ y\geqslant-1,\ x+y\leqslant0)$上和圆域$R(x^2+y^2\leqslant1)$上，函数类$K_2^{(m_1,m_2)}$上的最小零偏差多项式(参见[31])分别为

$$B_{m_1,m_2}(x,y)=\prod_{i=1}^{m_1}\left(x+\cos\frac{2i-1}{2(m_1+m_2)}\pi\right)\prod_{j=1}^{m_2}\left(y+\cos\frac{2j-1}{2(m_1+m_2)}\pi\right)$$

和

$$I_{m_1,m_2}(x,y)=\prod_{i=1}^{m_1}\left(x+\sin\frac{2i-m_1-1}{2(m_1+m_2)}\pi\right)\prod_{j=1}^{m_2}\left(y+\sin\frac{2j-m_2-1}{2(m_1+m_2)}\pi\right)$$

且相应的最小零偏差都是$2^{-(m_1+m_2)+1}$. 于是可知有下述结论.

定理 7 三角形域Δ上和圆域R上的降维展开公式

$$\begin{aligned}\int_{\Delta}F(x,y)\,dx\,dy\approx&\frac{1}{m_1!\,m_2!}\int_{\partial\Delta}\left\{\sum_{k=0}^{m_1-1}(-1)^kD^{(k,0)}\right.\\&\left.\cdot F(x,y)\,D^{(m_1-k-1,m_2)}B_{m_1,m_2}(x,y)\right\}dy\\&+\frac{1}{m_1!\,m_2!}\int_{\partial\Delta}\left\{\sum_{k=0}^{m_2-1}(-1)^{m_1+k+1}D^{(m_1,k)}\right.\\&\left.\cdot F(x,y)D^{(0,m_2-k-1)}B_{m_1,m_2}(x,y)\right\}dx\end{aligned} \tag{3.51}$$

和

$$\int_R F(x,y)\,dxdy \approx \frac{1}{m_1!\,m_2!}\int_{\partial R}\left\{\sum_{k=0}^{m_2-1}(-1)^k D^{(k,0)}\right.$$

$$\left.\cdot F(x,y) D^{(m_1-k-1,m_2)} I_{m_1,m_2}(x,y)\right\}dy$$

$$+\frac{1}{m_1!\,m_2!}\int_{\partial R}\left\{\sum_{k=0}^{m_2-1}(-1)^{m_1+k+1} D^{(m_1,k)}\right.$$

$$\left.\cdot F(x,y) D^{(0,m_2-k-1)} I_{m_1,m_2}(x,y)\right\}dx \qquad (3.52)$$

在限制辅助函数 $G(x,y)$ 属于类 $K_2^{(m_1,m_2)}$ 时是最优的. 式(3.51)和(3.52)的余项 $\rho_{m_1+m_2}$ 的估值分别为

$$|\rho_{m_1+m_2}| \leqslant \frac{1}{2^{m_1+m_2-1} m_1!\,m_2!}\left\|D^{(m_1,m_2)}F\right\|_{L_1(\Delta)} \qquad (3.53)$$

和

$$|\rho_{m_1+m_2}| \leqslant \frac{1}{2^{m_1+m_2-1} m_1!\,m_2!}\left\|D^{(m_1,m_2)}F\right\|_{L_1(R)} \qquad (3.54)$$

它们在前述意义下也是最小的.

近年来, 多元直交多项式已成为构造高维求积公式的一个常用工具(例如参阅本书第一章). 今参照多元直交多项式存在性的证明, 并根据式(3.49)可以证得下述

定理 8 存在唯一的 $G^*(X) \in P_n^{(m_1,\cdots,m_n)}$ 使得

$$\int_\Omega [G^*(X)]^2 dX = \min_{G\in P_n^{(m_1,\cdots,m_n)}} \int_\Omega [G(X)]^2 dX$$

并且 $G^*(X)$ 是 M 次直交多项式. 从而, 将式(3.44)中 G 取作 G^*, 便可获得一类最优降维展开公式, 其余项有如下的最小估值

$$|\rho_M| \leqslant \frac{1}{m_1! \cdots m_n!} \left\| \Lambda F \right\|_{L2} \left\| G^* \right\|_{L2} \tag{3.55}$$

为简明计，我们以 $n=2, m_1=2, m_2=1$ 的情形为例来证明G^*的存在性. 事实上一般情形下的证明是完全相似的. 今设$G(x,y) \in P_2^{(2,1)}$，即

$$G = x^2y + a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$$

记

$$\mu_{ij} = \int_\Omega x^i y^j dx dy$$

要证明G^*的存在性，只须证明以下列向量为行元素的矩阵是满秩的：

$$(\mu_{ij},\ \mu_{(i+1)j},\ \mu_{i(j+1)},\ \mu_{(i+2)j},\ \mu_{(i+1)(j+1)},\ \mu_{i(j+2)},\ \mu_{(i+3)j},\ \mu_{(i+2)(j+1)},\ \mu_{(i+1)(j+2)},\ \mu_{i(j+3)})$$
$$0 \leqslant i,\ j \leqslant 3,\ i+j \leqslant 3,\ (i,j) \neq (2,1)$$

应用归谬法，若所说不然，则有不全为零的常数a_{ij}($0 \leqslant i+j \leqslant 3, (i,j) \neq (2,1)$)使得它们与相应的行向量之积的和为零向量. 设

$$Q_{21}(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$$

则应有

$$\int_\Omega Q_{21} \cdot x^i y^j dx dy = 0 \quad 0 \leqslant i+j \leqslant 3 \quad (i,j) \neq (2,1)$$

于是

$$\int_\Omega [Q_{21}(x,y)]^2 dx\, dy = \sum_{i,j} a_{ij} \int_\Omega Q_{21} x^i y^j dx dy = 0$$

这与$\int_\Omega [Q_{21}(x,y)]^2 dx dy > 0$矛盾. 由此得证.

下面来讨论 $G(X) \in K_n^{(m_1, \cdots, m_n)}$的情况. 此时 G 可以表成

$$G(X)=x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}-Q(x_1,\cdots,x_n)$$

其中 $Q\in H_{M-1}^n$. 设H_{M-1}^n的一组 $M-1$ 次规范正交基底为 $\{G_i, i=1, 2, \cdots, N\}$. 由 Jackson 定理知, $N\leqslant\binom{M+n-2}{n-1}$. 于是由内积空间的最佳逼近定理立得, 唯有当$G$取为

$$G^*(X)=x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}-\sum_{i=1}^{N}\langle x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}, G_i\rangle G_i \tag{3.56}$$

时(其中$\langle\cdot,\cdot\rangle$表内积运算), 有

$$\int_\Omega [G^*]^2\, dX=\min_{G\in K_n^{(m_1,\cdots,m_n)}}\int_\Omega [G]^2\, dX$$

因此有下述

定理 9 对于$F(X)\in C^{(m_1,\cdots,m_n)}$及$G(X)\in K_n^{(m_1,\cdots,m_n)}$在公式(3.44)中如果取$G$为(3.56)所示的多项式$G^*$时, 则可以得到一类最优降维展开公式, 其余项(3.46)有与式(3.55)相同形式的最小估值.

对于轴对称区域(即关于所有坐标轴对称的区域), 规范正交多项式很容易求得, 因此利用定理 9 估值余项是比较简便的. 下面我们举一个二维轴对称区域Ω上的例子来说明问题. 我们记$\mu_{pq}=\int_\Omega x^p y^q dxdy$.

例 1 当$M=6$时, $H_{M-1}^2=H_5^2$ 的一组正交基底为(参阅【85】)

$$G_{5,0}=x^5+a_5x^3+b_5xy^2+C_5x$$
$$G_{4,1}=x^4y+a_4x^2y+b_4y^3+C_4y$$
$$G_{3,2}=x^3y^2+a_3x^3+b_3xy^2+C_3x$$
$$G_{2,3}=x^2y^3+a_2x^2y+b_2y^3+C_2y$$
$$G_{1,4}=xy^4+a_1x^3+b_1xy^2+C_1x$$
$$G_{0,5}=y^5+a_0x^2y+b_0y^3+C_0y$$

其中诸系数 a_i，b_i，c_i 由下列方程确定

$$\begin{pmatrix} \mu_{40} & \mu_{22} & \mu_{20} \\ \mu_{60} & \mu_{42} & \mu_{40} \\ \mu_{42} & \mu_{24} & \mu_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mu_{i+1,5-i} \\ \mu_{i+3,5-i} \\ \mu_{i+1,7-i} \end{pmatrix} \qquad i=5,3,1$$

$$\begin{pmatrix} \mu_{22} & \mu_{04} & \mu_{02} \\ \mu_{42} & \mu_{24} & \mu_{22} \\ \mu_{24} & \mu_{06} & \mu_{04} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mu_{i,6-i} \\ \mu_{i+2,6-i} \\ \mu_{i,8-i} \end{pmatrix} \qquad i=4,2,0$$

如果上述的正交基经规范化以后为 $\{G_1,G_2,G_3,G_4,G_5,G_6\}$，则对于$G\in K_2^{(m_1,m_2)}$，$m_1+m_2=M=6$，余项(3.46)有如下的最小估值

$$|\rho_6|\leqslant\frac{1}{m_1!\,m_2!}\left\|D^{(m_1,m_2)}F\right\|_{L_2}\left\|x^{m_1}y^{m_2}-\sum_{i=1}^{6}\langle x^{m_1}y^{m_2},G_i\rangle G_i\right\|_{L_2}$$

在【1】的第十三章中，曾考虑了齐次降维展开与齐次代数精度等特例．现在有了§3的准备就不必再受"齐次性"条件的约束，可以平行于【1】中的有关论述，直接建立下述诸命题．

命题 1　降维公式(3.44)对H_{M-1}^n类中的多项式说来是精确成立的．

命题 2　假设$F(X)\in C^{(m_1,\cdots,m_n)}(\Omega)$，$\Omega$为 n 维方体域 $\Omega=V_n$ $(-1\leqslant x_i\leqslant 1, i=1,2,\cdots,n)$．又设式(3.44)中的辅助多项式$G(X)$取为第二类 Чебышев 多项式的乘积

$$G(X)=Q_{m_1}(x_1)\cdots Q_{m_n}(x_n) \qquad (3.57)$$

这里

$$Q_{mi}(x)=\frac{\sin[(m_i+1)\cos^{-1}x]}{2^{m_i}\sqrt{1-x^2}}$$

$$i=1,2,\cdots,n$$

则$G\in H^{(m_1,\cdots,m_n)}$，而相应的降维公式的余项(3.46)有如下估值(参照式(3.48))

$$|\rho_M|\leqslant\frac{1}{2^{M-n}m_1!\cdots m_n!}\left\|\Lambda F\right\|_C \qquad (3.58)$$

命题 3 设C_A表示$C^{(m_1,\cdots,m_n)}(V_n)$中所有满足如下条件

$$|\Delta F|\leqslant A$$

的函数F作成的类. 则就整个函数类C_A来说，关于余项(3.46)有如下的确界公式

$$\inf_G \sup_{F\in C_A}\left|\rho_M(F,G)\right|=\frac{A}{2^{M-n}m_1!\cdots m_n!} \tag{3.59}$$

此处G走遍$H_{m_1}(x_1)H_{m_2}(x_2)\cdots H_{m_n}(x_n)$的全体多项式，且下确界仅由多项式(3.57)所达到.

命题 3 中用到了高维的 Korkin 定理，该定理的细节和证明可参阅【96】.

(3.58)与(3.59)两式表明，当$G(X)$按式(3.57)选取时可以达到余项估值极小化的目的，从而还可以得到$\Omega=V_n$域上的一类最优降维公式(3.44).

参照【1】中的方法，从上述最优降维公式出发，可以构造出具有最高代数精度的所谓“最优边界型求积公式”，这种公式用到的边界结点个数还是最少的. 推导细节可参阅下一节.

§5. 具有代数精度的边界型求积公式构造法

在这一节中，我们要利用§3中提出的具有代数精度的降维展开式，给出构造具有代数精度的边界型求积公式的方法. 这个方法构造出来的边界型公式里都含有被积函数的微商项，因此克服了第一章中用纯代数方法构造的边界型求积公式代数精度低的缺点. 不仅如此，对于某些特殊区域而言，我们还可以构造最优求积公式[1][98]，这类公式不但具有预先指定的代数精度，而且所用到的边界结点的个数还是最少的.

构造具有代数精度的边界型求积公式的关键是对降维后所得的低维积分选用适当的近似求积公式，使其代数精度与降维展开式的代数精度相“匹配”，亦即使最终获得的边界型求积公式的

代数精度与降维式的相当.

为叙述简明起见，我们以三维情形为例. 考虑可表为下述形式的积分区域

$$\Omega(\phi_1(x,y)\leqslant z\leqslant\phi_2(x,y),\ (x,y)\in\sigma) \tag{3.60}$$

其中ϕ_1，ϕ_2均为x，y的二元多项式，σ为 $x-y$ 平面上由分段光滑曲线围成的有界单连通闭区域.

设$F(X),G(X)\in C^{(m)}(\Omega),X=(x,y,z)\in\Omega$，$dX=dxdydz$，则由式(3.19)可得如下的降维展开公式

$$J=\int_\Omega F(X)\,dX$$

$$\approx\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\int_{\partial\Omega}\frac{\partial^k F}{\partial z^k}\cdot\frac{\partial^{m-k-1}G}{\partial z^{m-k-1}}\,dxdy \tag{3.61}$$

上述(3.61)右端已舍去余项ρ_m

$$\rho_m=\frac{(-1)^m}{m!}\int_\Omega\frac{\partial^m F}{\partial z^m}G(X)\,dX \tag{3.62}$$

不难验证

$$G(X)=\frac{m!}{(2m)!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^m\{(z-\phi_1(x,y))^m(z-\phi_2(x,y))^m\}$$

为三元多项式. 将它代入式(3.61)，则右端和式中每项被积函数里的因子$\partial^{m-k-1}G/\partial z^{m-k-1}$ 也都是三元多项式.

设

$$\Phi_k(x,y,z)=\frac{\partial^k F}{\partial z^k}\cdot\frac{\partial^{m-k-1}G}{\partial z^{m-k-1}}$$

于是由(3.61)有

$$J=\int_\Omega F(X)\,dX$$

$$\approx\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\int_\sigma[\Phi_k(x,y,\phi_2(x,y))$$

$$-\Phi_k(x,y,\phi_1(x,y))]\,dxdy \tag{3.63}$$

如果我们对上式右端的每个二重积分都利用同一个具有代数精度的二维求积公式

$$\int_{\sigma}\Psi(x,y)\,dxdy\approx\sum_{i=0}^{\mu_1-1}\sum_{j=0}^{\mu_2-1}A_{ij}\Psi(x_iy_j)\qquad(3.64)$$

便得到

$$J=\int_{\Omega}F(X)\,dX$$

$$\approx\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{\mu_1-i}\sum_{j=0}^{\mu_2-1}(-1)^kA_{ij}[\Phi_k(x_i,y_j,\phi_2(x_iy_j))$$

$$-\Phi_k(x_i,y_j,\phi_1(x_i,y_j))]\qquad(3.65)$$

此即计算积分J的三维边界型求积公式，其中结点$(x_i,y_j,\phi_2(x_i,y_j))$ $(x_i,y_j,\phi_1(x_i,y_j))$ $(i=0,\cdots,\mu_1-1;\ j=0,\ \cdots,\mu_2-1)$均在边界面$\Omega$上．由定理1知，降维展开式(3.63)具有$2m-1$次代数精度，而(3.64)又是具有代数精度的二维求积公式，故边界型求积公式(3.65)亦具有代数精度．因此，我们可以断言，对于(3.60)型区域上的积分J，恒能构造出形如(3.65)的具有代数精度的边界型求积公式．

为使边界型求积公式(3.65)与降维展开式(3.63)具有同样的$2m-1$次代数精度，应该利用具有多少次代数精度的求积公式(3.64)呢？下述的定理回答了这个问题．

定理10 设积分区域Ω为(3.60)型区域，其中$\phi_1(x,y)$为r次多项式，$\phi_2(x,y)$为s次多项式，为使三维边界型求积公式(3.65)与相应的降维展开式(3.63)都具有$2m-1$次代数精度，则构造(3·65)时所用的重积分求积公式(3.64)的代数精度不应低于t次，其中

$$t=\begin{cases}2m-1 & ,\ \text{当}\ r=s=0\\ 2m\cdot\max\{r,s\} & ,\ \text{其它情形}\end{cases}$$

证 记式(3.63)右端每项中的积分为P_k

$$P_k=\int_{\sigma}[\Phi_k(x,y,\phi_2(x,y))-\Phi_k(x,y,\phi_1(x,y))]\,dxdy$$

其中

$$\Phi_k=\frac{\partial^k F}{\partial z^k}\cdot\frac{\partial^{m-k-1}G}{\partial z^{m-k-1}}$$

显然，为使式(3.65)具有$2m-1$次代数精度，对于每个P_k所使用的求积公式(3.64)的最低代数精度可以是不相同的，即对于每个P_k可以使用不同的求积公式(3.64)，不妨设相应于P_k的(3.64)的最低代数精度为t_k. 今要求对每个P_k均使用同一个求积公式(3.64)，且要保证式(3.65)具有$2m-1$次代数精度，则不难看出该求积公式的代数精度不得低于$t=\max\{t_k\}$. 因此，只须估算出t_k就不难证得定理.

今设F为$2m-1$次多项式，则P_k的被积函数亦为多项式，且该多项式的次数就是t_k. 由于F为$2m-1$次多项式，故$\partial^k F/\partial z^k$为$2m-k-1$次多项式，从而不难验证

$$多项式\left[\frac{\partial^k F}{\partial z^k}\right]_{z=\phi_1(x,y)}的次数=\begin{cases}2m-k-1 & r=0\\(2m-k-1)\cdot r & r>0\end{cases}$$

$$多项式\left[\frac{\partial^k F}{\partial z^k}\right]_{z=\phi_2(x,y)}的次数=\begin{cases}2m-k-1 & s=0\\(2m-k-1)\cdot s & s>0\end{cases}$$

由于$G(X)$是m次多项式，利用计算高阶导数的Leibniz 公式可以算得

$$\frac{\partial^{m-k-1}G}{\partial z^{m-k-1}}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-k-1}C_{i,j}(z-\phi_1(x,y))^{m-i-j}\cdot(z-\phi_2(x,y))^{i+j+k-m+1}$$

其中$C_{i,j}$为依赖于m，k的系数. 多项式

$$\frac{\partial^{m-k-1}G}{\partial z^{m-k-1}}\Bigg|_{z=\phi(x,y)}=\sum_{\substack{i=0\\(i+j=m)}}^{m}\sum_{j=0}^{m-k-1}C_{i,j}(\phi_1(x,y)-\phi_2(x,y))^{k+1}$$

的次数为$(k+1)\cdot\max\{r,s\}$，同理

$$\left.\frac{\partial^{m-k-1}G}{\partial z^{m-k-1}}\right|_{z=\phi_2(x,y)}$$

的次数亦为$(k+1)\cdot\max\{r,s\}$. 从而

$$\Phi_k(x,y,\phi_1(x,y))\text{的次数}=\begin{cases}2m-k-1+(k+1)\max\{r,s\} & r=0\\ (2m-k-1)r+(k+1)\max\{r,s\} & r>0\end{cases}$$

$$\Phi_k(x,y,\phi_2(x,y))\text{的次数}=\begin{cases}2m-k-1+(k+1)\max\{r,s\} & s=0\\ (2m-k-1)s+(k+1)\max\{r,s\} & s>0\end{cases}$$

因此,

$$t_k=\begin{cases}2m-k-1 & r=s=0\\ 2m\cdot\max\{r,s\} & \text{其它情形}\end{cases}$$

而

$$t=\max_k\{t_k\}=\begin{cases}2m-1 & r=s=0\\ 2m\cdot\max\{r,s\} & \text{其它情形}\end{cases}$$

从而定理得证.

例 1 考察

$$I=\int_\Omega F(x,y,z)\,dxdydz$$

其中$\Omega(-1\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant y\leqslant 1,\ -1\leqslant z\leqslant 1)$.

显然, 单位方体域Ω中$\phi_1(x,y)=-1$, $\phi_2(x,y)=1$, 故Ω属于(3.60)型区域, 我们可以构造出具有$2m-1$次代数精度的边界型求积公式

$$I\approx\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{\mu_1-1}\sum_{j=0}^{\mu_2-1}(-1)^k A_{ij}[\Phi_k(x_i,y_j,1)-\Phi_k(x_i,y_j,-1)]$$

其中

$$\Phi_k=\frac{\partial^k F}{\partial z^k}\cdot\frac{\partial^{m-k-1}G}{\partial z^{m-k-1}}$$

$$G(X)=\frac{m!}{(2m)!}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^m[(z^2-1)^m]$$

又因$r=s=0$，根据定理10应当使用$2m-1$次代数精度的求积公式(3.64)，我们不妨使用乘积型的Gauss型求积公式，从而得到计算I的边界型求积公式

$$I\approx\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^k c_i c_j[\Phi_k(x_i,y_j,1)-\Phi_k(x_i,y_j,-1)]$$

其中c_i为Gauss求积系数，x_i，y_j是m次Legendre多项式的零点，结点的数目为$2m^2$个.

根据定理10，读者还可以自行构造各种具体区域（例如单纯形域、圆柱域等等)上的具有代数精度的边界型求积公式.

我们现在利用§4中导出的最优降维展开公式来构造具有最高代数精度的最优边界型求积公式.

以下，我们考虑的是方体域$V_n(-1\leqslant x_i\leqslant 1,\ i=1,\cdots,n)$上的积分. 由于构造高维方体域$V_n$上的边界型求积公式，必须用到低维域上的求积公式，所以应从低维作起. 今在基本公式(3.44)中令$\Omega\equiv V_2$可得

$$\int_{V_2}F(x,y)\,dx\,dy\approx\frac{1}{m_1!\,m_2!}\left\{\int_{-1}^{1}W_1\,dy-\int_{-1}^{1}W_2\,dx\right\}\tag{3.66}$$

这里

$$W_1=W_1(y)=\sum_{k=0}^{m_1-1}(-1)^k D^{(k,0)}F\cdot D^{(m_1-k-1,m_2)}G\Big|_{x=-1}^{x=1}$$

$$W_2=W_2(x)=\sum_{k=0}^{m_2-1}(-1)^{m_1+k}D^{(m_1,k)}F\cdot D^{(0,m_2-k-1)}G\Big|_{y=-1}^{y=1}$$

由§4命题1知最优边界型公式至多只能要求对H_{M-1}^{2}中的多项式是精确的. 为达到这一精度，类似于前面的做法，我们选取具有代数精度为$M-1$的任意一个机械求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \approx \sum_{j=0}^{n-1} c_j f(t_j) \quad (-1 \leqslant t_j \leqslant 1) \tag{3.67}$$

代入式(3.66)，并注意到$G(x,y)=Q_{m_1}(x)Q_{m_2}(y)$，

$$Q_m(x)=\frac{\sin[(m+1)\cos^{-1}x]}{2^m\sqrt{1-x^2}}$$

可得

$$\int_{V_2} F(x,y)\,dx\,dy \approx \frac{1}{m_1!\,m_2!}\sum_{j=0}^{n-1} c_j \Phi(t_j) \tag{3.68}$$

这里

$$\begin{aligned}\Phi(t_j)= & \sum_{k=0}^{m_1-1}(-1)^k m_2!\Big\{F^{(k,0)}(1,t_j)Q_{m_1}^{(m_1-k-1)}(1)\\ & -F^{(k,0)}(-1,t_j)Q_{m_1}^{(m_1-k-1)}(-1)\Big\}\\ & -\sum_{k=0}^{m_2-1}(-1)^{m_1+k}\Big\{F^{(m_1,k)}(t_j,1)Q_{m_1}(t_j)Q_{m_2}^{(m_2-k-1)}(1)\\ & -F^{(m_1,k)}(t_j,-1)Q_{m_1}(t_j)Q_{m_2}^{(m_2-k-1)}(-1)\Big\}\end{aligned}$$

其中$F^{(j,k)}=D^{(j,k)}F$. 于是不难推断下述定理为真.

定理 11 对于函数$F(x,y)\in C^{(m_1,m_2)}$，公式(3.68)恰好给出了一类最优边界型求积公式；这类公式对H_{M-1}^2中的一切多项式来说是精确的.

通过对(3.67)的不同选取，可以获得各种不同的具体的边界型求积公式. 特别，可以根据定理11去考虑V_2域上的计值点个数最少的最优边界型求积公式. 事实上，若M为偶数，$M=2r(r>1)$. 则取$n=r$，并将(3.67)取成$M-1=2r-1$次的Gauss求积公式，该公式用到r个计值点. 将这样的式(3.67)代入式(3.66)以后，就得到由$4r$个计值点作成的最优边界型公式(3.68)，它对类H_{2r-1}^2中的一切多项式是精确的，而且点数$4r$是不能再减少的了.

故有下述

定理 12 为了对于 H_{2r-1}^2 中的一切多项式精确成立，方域 V_2 ($|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$) 上的一个最优边界型公式需要且只需要用到边界上 $4r$ 个计值点，它们的坐标为 $(\pm 1, t_j)$；$(t_j, \pm 1)$ $(j=0, 1, \cdots, n-1)$，而 t_j 是 r 次 Legendre 多项式的零点.

进一步我们来讨论 V_3 ($|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$, $|z|\leqslant 1$) 上的三重积分

$$I(F)=\int_{V_3} F(x,y,z)\,dxdydz$$

其中 $F(x,y,z)$ 是一多次可微函数. 由(3.44)，按前述做法可得如下的最优降维展开公式

$$\begin{aligned} I(F)\approx\frac{1}{m_1!\,m_2!\,m_3!}\Big\{&\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big[X(x,y,z)\Big]_{x=-1}^{x=1}dydz\\ &+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big[Y(x,y,z)\Big]_{y=-1}^{y=1}dzdx\\ &+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big[Z(x,y,z)\Big]_{z=-1}^{z=1}dx\,dy\Big\} \end{aligned}\tag{3.69}$$

其中

$$\begin{aligned} X(x,y,z)&=\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{k}D^{(k,0,0)}F\\ &\quad\cdot Q_{m_1}{}^{(m_1-k-1)}(x)Q_{m_2}{}^{(m_2)}(y)Q_{m_3}{}^{(m_3)}(z)\\ Y(x,y,z)&=\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m_1+k}D^{(m_1,k,0)}F\\ &\quad\cdot Q_{m_1}(x)Q_{m_2}{}^{(m_2-k-1)}(y)Q_{m_3}{}^{(m_3)}(z)\\ Z(x,y,z)&=\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m_1+m_2+k}D^{(m_1,m_2,k)}F\\ &\quad\cdot Q_{m_1}(x)Q_{m_2}(y)Q_{m_3}{}^{(m_3-k-1)}(z) \end{aligned}$$

式(3.69)的右端舍去的余项为

$$\rho_M=\frac{(-1)^M}{m_1!\,m_2!\,m_3!}\int_{V_3} GD^{(m_1,m_2,m_3)}F\,dxdydz$$

这里

$$G(x,y,z)=Q_{m_1}(x)Q_{m_2}(y)Q_{m_3}(z)$$

今设$F(x,y,z)\in H^3_{M-1}$，则$\rho_M=0$. 且函数

$$\Big[X(x,y,z)\Big]_{x=-1}^{x=1} \qquad \Big[Y(x,y,z)\Big]_{y=-1}^{y=1}$$

$$\Big[Z(x,y,z)\Big]_{z=-1}^{z=1}$$

将成为一些二元多项式，其对各双变元而言恰好属于二元多项式类H^2_{M-1}. 于是将边界型公式(3.68) 应用于式 (3.69) 右端的各个二重积分上，即可得到V_3上的一个最优边界型求积公式. 因此，令$M=2n$，由定理11及12即可得到下述

定理 13 三维方域V_3上存在有对于H^3_{2n-1}类中的多项式精确成立的最优边界型求积公式. 这种公式只须用到V_3边界上的 $12n$ 个结点 (其中 t_j 为n 次 Legendre 多项式的零点)：

$$(\pm 1,\pm 1,t_j),\ (\pm 1,t_j,\pm 1),\ (t_j,\pm 1,\pm 1)$$

$$j=0,1,\cdots,n-1$$

事实上，只须逐次应用最优降维展开的方法，用平行于【98】中的论述，还不难把定理12及13拓广成如下的普遍定理：

定理 14 n 维方域V_n上存在有对于 H^n_{2r-1}类中的多项式精确成立的最优边界型求积公式. 这种公式只须用到V_n边界上的 $2^{n-1}\cdot nr$个结点

$$(\pm 1,\cdots,\pm 1,t_j),(\pm 1,\cdots,t_j,\pm 1),\cdots,(t_j,\cdots,\pm 1,\pm 1)$$

$$j=0,1,\cdots,n-1$$

其中t_j 为 n 次 Legendre 多项式的零点.

最后值得提到的是，如何应用各种最优降维展开式去构造其它各种区域上的具有代数精度的边界型公式的问题，仍然值得继续研究.

§6. 降维展式及边界型公式的应用举例

我们仅就以下三个方面举例说明降维展开公式和边界型求积公式的某些应用.

一、有理分式逼近

由Darboux 公式的一个特殊形式(3.3)式，容易导出如下的Obreschkoff公式(为此，只须在(3.3)中，取$F=f'$，$b=x$，$a=x_0$，$n=m+k$，而$\phi(t)=(x_0-t)^k(x-t)^m$)

$$\int_{x_0}^{x} F(t)\,dt=\frac{m!\,k!}{(m+k)!}\sum_{\nu=1}^{m}\binom{m+k-\nu}{k}\frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(x_0)$$

$$-\frac{m!\,k!}{(m+k)!}\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^k\binom{m+k-\nu}{k}\frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(x)$$

$$-\frac{m!\,k!}{(m+k)!}R_{m+k} \qquad (3.70)$$

或者写成另一形式

$$\sum_{\nu=0}^{m}\binom{m+k-\nu}{k}\frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(x_0)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\binom{m+k-\nu}{k}\frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(x)+R_{m+k} \quad (3.71)$$

其中

$$R_{m+k}=-\frac{1}{k!\,m!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^m(x_0-t)^k f^{(m+k+1)}(t)\,dt$$

为了便于使用，我们再将式(3.71)改写成 E. Beck 形式

$$\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\frac{\binom{k}{\nu}}{\binom{m+k}{\nu}}\frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(x)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m} \frac{\binom{m}{\nu}}{\binom{m+k}{\nu}} \frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0)$$

$$+ \frac{1}{(k+m)!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^m (x_0-t)^k f^{(m+k+1)}(t)\,dt$$

(3.72)

下面，我们利用式(3.72)寻求某些函数的各种有理分式逼近.

1. 在式(3.72)中，令 $x_0=0$，$f(x)=e^x$，得到

$$e^x = \frac{\sum_{\nu=0}^{m} \frac{\binom{m}{\nu}}{\binom{m+k}{\nu}} \frac{x^\nu}{\nu!}}{\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \frac{\binom{k}{\nu}}{\binom{m+k}{\nu}} \frac{x^\nu}{\nu!}} + \frac{\frac{(-1)^{m+k}}{(m+k)!} \int_{x_0}^{x} t^k (t-x)^m e^t dt}{\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \frac{\binom{k}{\nu}}{\binom{m+k}{\nu}} \frac{x^\nu}{\nu!}}$$

在上式中舍去余项，就得到 e^x 的一个有理逼近式

$$e^x \approx \frac{\sum_{\nu=0}^{m} (m+k-\nu)! \binom{m}{\nu} x^\nu}{\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu (m+k-\nu)! \binom{k}{\nu} x^\nu} \tag{3.73}$$

特别，当 $m=k$ 时

$$e^x \approx \frac{\sum_{\nu=0}^{k} (2k-\nu)! \binom{k}{\nu} x^\nu}{\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu (2k-\nu)! \binom{k}{\nu} x^\nu} \tag{3.74}$$

利用式(3.74)，我们可以近似地计算e^x. 例如，令$k=1$，2，3，4，5，我们分别得到关于e^x的下列逼近式

a. $\frac{2+x}{2-x}$　　　　b. $\frac{12+6x+x^2}{12-6x+x^2}$

$c.\ \dfrac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}$

$d.\ \dfrac{1680+840x+180x^2+20x^3+x^4}{1680-840x+180x^2-20x^3+x^4}$

$e.\ \dfrac{30240+15120x+3360x^2+420x^3+30x^4+x^5}{30240-15120x+3360x^2-420x^3+30x^4-x^5}$

计算所得的一些数值结果如下表：

x	e^x	a	b	c	d	e
1	2.718281828	3.0	2.714	2.71831	2.71828172	2.718281828
2	7.389056		7.00	7.400	7.38889	7.3890578
3	20.08554		13.00	20.7	20.065	20.08597

2. 考虑函数

$$thx=(e^{2x}-1)/(e^{2x}+1)$$

的有理逼近式. 最简单的分式是将式(3.74)代入上式，可得

$$thx\approx\frac{\sum_{\nu=0}^{k}(2k-\nu)!\binom{k}{\nu}(2x)^{\nu}-1}{\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu}(2k-\nu)!\binom{k}{\nu}(2x)^{\nu}+1} \qquad (3.75)$$

3. 在式(3.72)中舍去余项，并且令$x_0=1$，$f(x)=x^n$，其中n是任一实数，得到

$$\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu}\frac{\binom{k}{\nu}}{\binom{m+k}{\nu}}\frac{(x-1)^{\nu}}{\nu!}n(n-1)\cdots(n-\nu+1)x^{n-\nu}$$

$$\approx\sum_{\nu=0}^{m}\frac{\binom{m}{\nu}}{\binom{m+k}{\nu}}\frac{(x-1)^{\nu}}{\nu!}n(n-1)\cdots(n-\nu+1)$$

从而

$$x^n \approx \frac{\sum_{\nu=0}^{m} \frac{\binom{m}{\nu}\binom{n}{\nu}}{\binom{m+k}{\nu}} (x-1)^\nu}{\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \frac{\binom{k}{\nu}\binom{n}{\nu}}{\binom{m+k}{\nu}} \frac{(x-1)^\nu}{x^\nu}} \qquad (3.76)$$

或者

$$x^n \approx \frac{x^k \sum_{\nu=0}^{m} (m+k-\nu)!\,n(n-1)\cdots(n-\nu+1)\binom{m}{\nu}(x-1)^\nu}{\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu(m+k-\nu)!\,n(n-1)\cdots(n-\nu+1)\binom{k}{\nu}(x-1)^\nu x^{k-\nu}}$$

$$(3.76)'$$

特别，当$m=k$时，近似式(3.76)′变成

$$x^n \approx \frac{x^k \sum_{\nu=0}^{k} (2k-\nu)!\,n(n-1)\cdots(n-\nu+1)\binom{k}{\nu}(x-1)^\nu}{\sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu(2k-\nu)!\,n(n-1)\cdots(n-\nu+1)\binom{k}{\nu}(x-1)^\nu x^{k-\nu}}$$

$$(3.77)$$

在式(3.77)中，如令$k=2$，$x=2$，$n=\frac{1}{3}$，可得

$$\sqrt[3]{2} \approx \frac{\left(12+2-\frac{2}{9}\right)4}{12\cdot 4-2\cdot 2-\frac{2}{9}} = \frac{248}{197} \approx 1.2589$$

4. 在式(3.72)中舍去余项，并且令$x_0=1$，$f(x)=\ln x$，则可得

$$\ln x \approx \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\binom{m}{\nu}}{\binom{m+k}{\nu}} \frac{(x-1)^\nu}{\nu}(-1)^{\nu-1} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\binom{k}{\nu}}{\binom{m+k}{\nu}} \frac{(x-1)^\nu}{\nu x^\nu}$$

$$(3.78)$$

当 $m=k$ 时，式(3.78)变成

$$\ln x \approx \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\binom{k}{\nu}}{\nu\binom{2k}{\nu}}\left[(-1)^{\nu-1}+\frac{1}{x^{\nu}}\right](x-1)^{\nu} \qquad (3.79)$$

特别，取 $k=1$，有

$$\ln x \approx \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$

取 $k=2$，有

$$\ln x \approx \frac{x^2-1}{12x^2}(8x-x^2-1)$$

同 Padé 逼近中的情况相仿，当$m=k$时，式(3.72)常有较佳的逼近效果．此时通过简单的变量替换可将式(3.72)变成

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{\nu=1}^{k}\frac{(2k-\nu)!}{(2k)!}\binom{k}{\nu}\left[f^{(\nu)}(x_0)-(-1)^{\nu}f^{(\nu)}(x)\right] \cdot (x-x_0)^{\nu}+R_{2k} \qquad (3.80)$$

其中

$$R_{2k}=\frac{(x-x_0)^{2k+1}}{(2k)!}\int_0^1 t^k(t-1)^k f^{(2k+1)}(x_0+t(x-x_0))\,dt$$

式(3.80)一般称为Hummel-Seebeck-Obrechkoff公式，简称HSO公式(参阅【29】，【40】)．

对于函数 $f(x)=e^x$，利用 HSO 公式($x_0=0$) 得到的有理逼近式如(3.74)所示．有趣的是，这个 e^x 的有理逼近式恰好为 e^x 的 $[k/k]$级 Padé 逼近式：

$$[k/k]=\frac{\sum_{\nu=0}^{k}(2k-\nu)!\binom{k}{\nu}x^{\nu}}{\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{\nu}(2k-\nu)!\binom{k}{\nu}x^{\nu}} \qquad (3.81)$$

当然，我们不要因此而认为用HSO公式对任意给定函数所

求得的有理逼近式就一定是该函数的Padé逼近式. 事实上，若取$f(x)=\exp(\text{arctg}x)$，则按HSO公式($x_0=0$，$k=1$)得到

$$f(x)\approx\frac{1+\frac{1}{2}x+x^2+\frac{1}{2}x^3}{1-\frac{1}{2}x+x^2}$$

但相应的[3/2]阶 Padé 逼近式却为

$$f(x)\approx\frac{1+0.84x+0.87x^2+\frac{17}{60}x^3}{1-0.16x+0.53x^2}$$

关于HSO公式的适用范围问题，E. W. Cheney与T. H. Southard在总结性文章[9]中已有讨论. 他们指出，只要函数$f(x)$满足关系式.

$$f'(x)=R_1(x)f(x)+R_2(x) \tag{3.82}$$

其中$R_1(x)$和$R_2(x)$为x的任意有理函数，则$f(x)$就可以用HSO公式来获得它的有理逼近式.

满足式(3.82)的函数$f(x)$还是不少的，例如比较常见的有

e^x，$e^{-x^2/2}$，10^x，$\log_b x$，$\text{arctg}x$

$(x^2+1)^{-1/2}(c+sh^{-1}x)$，$x^{-n}(a+b\log x)$

$(1-x^2)^{-1/2}$，$[R(x)]^2$

其中$R(x)$为任意有理函数，a，b，c为任意数.

下面，我们将给出一个寻找二元函数的近似有理分式的方法. 在某种意义下，这个方法可以看作是以Obrechkoff-Beck 公式为基础的一元有理逼近方法在二维情形的扩充.

令$C_2\equiv[x_0,x;y_0,y]$表示矩形区域，$x_0<x$，$y_0<y$. 为简便起见，往后常采用如下记法

$$\Big[f(x,y)\Big]_{x_0}^{x}=f(x,y)-f(x_0,y),$$

$$\left[f(x,y) \right]_{y_0}^{y} = f(x,y) - f(x,y_0)$$

假定 $G(x)$ 是x的m次多项式，x^m 的系数为1. 今取$F(x,y)=\partial^2 f/\partial x\partial y$，代入公式(3.20)，便得到

$$f(x,y)=f(x_0,y)+f(x,y_0)-f(x_0,y_0)$$
$$+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k}{m!}\left[\left(\frac{d^{m-k-1}G}{dx^{m-k-1}}\right)\left[\frac{\partial^{k+1}f}{\partial x^{k+1}}\right]_{y_0}^{y}\right]_{x_0}^{x}+R_m \tag{3.83}$$

其中余项 R_m 可表作

$$R_m=\frac{(-1)^m}{m!}\int_{x_0}^{x} G(x)\left[\left[\frac{\partial^{m+1}f}{\partial x^{m+1}}\right]_{y_0}^{y}\right]dx \tag{3.84}$$

在公式(3.83)中可以对$G(x)$作各种选择. 为了使余项(3.84)有较小的估值，最好选择区间[0,1]上的 Legendre 多项式作为 $G(x)$（参阅【5】中定理3）：

$$G(x)=\frac{m!}{(2m)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^m[x^m(x-1)^m]\quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

将上式代入式(3.83)，便得到如下的一个展开公式(其中$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$)

$$f(x,y)=f(0,y)+f(x,0)-f(0,0)$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}}{(2m)!}\left[\left(\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right)_0^y\left(\frac{d}{dx}\right)^{2m-k}(x^2-x)^m\right]_0^x+R_m \tag{3.85}$$

其中余项 R_m 有如下两种估计

$$|R_m|\leqslant\frac{m!}{(2m)!}\left(\frac{2x}{m+0.5}\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\frac{\partial^{m+1}f}{\partial x^{m+1}}\right\|_C \tag{3.86}$$

$$|R_m|\leqslant\frac{m!}{(2m)!}\left(\frac{xy}{2m+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\frac{\partial^{m+2}f}{\partial x^{m+1}\partial y}\right\|_C \tag{3.87}$$

式(3.86)和(3.87)中$\|\cdot\|_C$表示函数在$C_2(0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1)$上的

Чеъышев范数.

注意，式(3.85)中的R_m相当于在(3.84)中令$x_0=y_0=0$所得. 因此，为验证式(3.86)，只需对式(3.84)右端的积分（其中 $x_0=y_0=0$）应用Schwarz不等式. 事实上，我们有

$$|R_m| \leqslant \frac{1}{m!}\left(\int_0^x (G(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^x \left(\left[\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}}\right]_0^y\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \frac{1}{m!}\left(\frac{(m!)^4}{(2m)!\,(2m+1)!}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot \left\|\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}}\right\|_C \cdot \sqrt{x}$$

$$\leqslant \frac{m!}{(2m)!\sqrt{2m+1}} \cdot 2 \cdot \left\|\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}}\right\|_C \cdot \sqrt{x}$$

由此式(3.86)得证. 至于(3.87)，其证法完全相似，读者不难自行验证之.

容易看出，在m较大时，(3.86)和(3.87)两式的估值是较小的. 例如取$m=8$，就有

$$|R_8| \leqslant \frac{1}{2075673600}\left\|\frac{\partial^{10} f}{\partial x^9 \partial y}\right\|_C,$$

$$|R_8| \leqslant \frac{1}{1037836800}\left\|\frac{\partial^9 f}{\partial x^9}\right\|_C$$

下面我们应用式(3.83)来导出某些常见函数的有理逼近式.

1. 求$\log(1+x+y)$的近似有理分式，其中$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$.

以$G_k(x)$简记如下的k次多项式

$$G_k(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{2m-k}(x^2-x)^m$$

于是根据式(3.83)可导出

$$\log(1+x+y) \approx \log(1+x) + \log(1+y) + \sum_{k=1}^{m} \frac{(k-1)!}{(2m)!}\left[\left(\frac{1}{(1+x+y)^k} - \frac{1}{(1+x)^k}\right)G_k(x)\right]_0^x \tag{3.88}$$

至于一元函数$\log(1+x)$及$\log(1+y)$，则可以应用现成的所谓Beck形式的近似有理逼近式(参阅【73】中第二章§2). 或者在式(3.79)中将x换成$1+x$，得到

$$\log(1+x) \approx \sum_{k=1}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{k\binom{2m}{k}} \left[\left(\frac{x}{1+x}\right)^k - (-x)^k\right] \tag{3.89}$$

将上式及相应的$\log(1+y)$的近似式代入式(3.88)后，便得到一个二元的有理逼近式.

我们指出，假如令(3.89)中的x换成$x+y$，则所获得的以$(x+y)$为变元的有理分式，其精度一般说来将比不上式(3.88).

例如，取$m=4$，令$x=y=1$代入式(3.88)(其中$\log 2$按式(3.89)计算)，则可求得近似值

$$\log 3 \approx 1.0958445$$

误差为0.00277. 但如果按Beck近似式(3.89)计算(其中取$x=2$)，则得

$$\log 3 \approx 1.0935744$$

误差为0.00504.

事实上，m取得越大，则式(3.88)的精确性越加显著.

总之，利用二元函数展开法(例如公式(3.85)所导出的近似有理分式，往往会比藉助于一元函数的Obrechkoff-Beck公式所得出的结果来得好些. 一般说来，将公式(3.85)应用于近似计算时，误差的主要来源是$f(0,y)$及$f(x,0)$的近似代替. 实际上，由R_m所产生的误差通常是微不足道的.

2. 求$f(x,y)=e^{xy}$的有理近似分式

将$f(x,y)=e^{xy}$代入到式(3.85)可得到

$$e^{xy} \approx 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{(2m)!} y^k G_k(x) e^{xy} - \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{(2m)!} y^k G_k(0) \tag{3.90}$$

不难算出

$$G_k(0) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{2m-k} [x^m(x-1)^m] = (-1)^k \binom{m}{k} (2m-k)!$$

将$G_k(0)$代入(3.90)，再经整理，则得到二元有理逼式

$$e^{xy} \approx \frac{(2m)! + \sum_{k=1}^{m} (2m-k)! \binom{m}{k} y^k}{(2m)! + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k y^k G_k(x)} \tag{3.91}$$

显然，当$x=0$或$y=0$时，上式是精确成立的．又如取$x=1$或$y=1$，则得出一元函数e^y或e^x的近似有理分式．

然而式(3.91)的右端关于变元x与y是不对称的．为了达到对称化的目的，只须将x与y对换位置，然后将所得的公式与(3.91)右端分式分子、分母分别相加即可．

由于双曲函数可以用指数函数的有理分式表示出来，例如$\text{th}xy = (e^{2xy}-1)/(e^{2xy}+1)$．因此根据式(3.91)还可以得到关于$\text{th}xy$等函数的有理逼近式．

在公式(3.91)中取$x=1$，不难算出

$$G_k(1) = (2m-k)! \binom{m}{k}$$

于是得到近似有理分式

$$e^y \approx \frac{(2m)! + \sum_{k=1}^{m} (2m-k)! \binom{m}{k} y^k}{(2m)! + \sum_{k=1}^{m} (2m-k)! \binom{m}{k} (-y)^k} \tag{3.92}$$

相当有趣的是，这个近似式恰好包括了 Euler 无穷连分式

$$e^y = 1 + \frac{2y}{2-y} + \frac{y^2}{6} + \frac{y^2}{10} + \cdots + \frac{y^2}{2(2n+1)} + \cdots$$

的所有渐近分式(参阅【73】的第二章§5). 另一方面(3.92)也可利用Obrechkoff公式推导出来.

除此而外, (3.91)也还包含另一个在本质上不同于(3.92)的有理逼近式

$$e^x \approx \frac{(2m)! + \sum_{k=1}^{m} (2m-k)! \binom{m}{k}}{(2m)! + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k G_k(x)} \tag{3.93}$$

这个有理逼近式的特点是分子中无变元出现. 对不同的变化区间而言, 逼近式(3.92)和(3.93)究竟孰优孰劣, 这是一个有待继续研究的问题.

在§3中, 对$G(x)$作其他不同的选择, 可得到相应的展开公式. 利用这些降维展开公式, 也可以构造简便而有效的二元有理逼近式. 兹不详述.

二、特征值问题

在涉及弹性理论、不稳定振动分析、原子物理的振动问题里, 特征值问题扮演着主要角色. 问题的提法可以概括如下: 已知某个包含参量λ(通常称为"特征值")的线性微分方程及某些齐次的边界条件(如果不考虑其平凡解$y=0$的话, 它们使得方程仅仅对一些选择适当的λ是可解的), 寻求使得方程有解的最小的值λ_1(或者是几个最小的值λ_i).

我们指出, 在§1中给出的Petr公式对于解决特征值问题是很有用处的. Petr 公式(3.5)只用到函数本身及其微商在积分区间端点的值. 这些值恰好可以通过给定的微分方程加边界条件来确定.

这里, 我们只用简单的例子来说明如何利用公式(3.5)去解决特征值问题. 读者不难由此举一反三, 将(3.5)式用于更为复杂的情形.

设有二阶常系数微分方程

$$y''+y'+\lambda y=0 \tag{3.94}$$

及边界条件

$$y(0)=0,\ y'(1)=0$$

由于线性齐次微分方程保留一个不定的振幅因子，因此我们可以给y在$x=0$点的微商以任意的值，比如可令$y'(0)=1$.

在这些条件下，微分方程(3.94)单值地确定了y的各阶微商在$x=0$点的值. 设

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

代入微分方程，并比较等式两边同次项的系数，可得

$$a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=-1/2,\ a_3=(1-\lambda)/6,\ \cdots$$

$$y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=-1,\ y'''(0)=1-\lambda,\ \cdots \tag{3.95}$$

假定

$$x=1+\xi,\ y=b_0+b_1\xi+b_2\xi^2+b_3\xi^3+\cdots$$

使用同样的方法，我们就可以得到$y\equiv y(x)$的各阶微商在另一个端点的值：

$$b_0,\ b_1=0,\ b_2=-\lambda b_0/2,\ b_3=\lambda b_0/6,\cdots$$

$$y(1)=b_0,\ y'(1)=0,\ y''(1)=-\lambda b_0,\ y'''(1)=\lambda b_0,\ \cdots \tag{3.96}$$

其中b_0是未知的.

在Petr公式(3.5)中，设$F(x)$为$y''(x)$，则$F'(x)=y'''(x)$，并且在两个端点有

$$F(0)=-1 \qquad F(1)=-\lambda b_0$$

$$F'(0)=1-\lambda \qquad F'(1)=\lambda b_0$$

又在式(3.5)中令$m=2$，得到

$$\int_0^1 y''(x)dx=y'(1)-y'(0)=\frac{6(-1-\lambda b_0)+(1-\lambda-\lambda b_0)}{12}$$

从而

$$b_0=(7-\lambda)/7\lambda \tag{3.97}$$

现在令式(3.5)中的$F(x)=y'(x)$，并取$m=3$，则有

$$F(0)=1 \qquad F(1)=0$$

$$F'(0)=-1 \qquad F'(1)=-\lambda b_0$$

$$F''(0)=1-\lambda \qquad F''(1)=\lambda b_0$$

由式(3.5)，可得

$$\int_0^1 y'(x)\,dx=y(1)-y(0)=\frac{60+12(-1+\lambda b_0)+(1-\lambda+\lambda b_0)}{120}$$

从而又有

$$b_0=(49-\lambda)/(120-13\lambda) \tag{3.98}$$

比较式(3.97)和(3.98)的右端，我们就找到了确定特征值λ的二次方程

$$20\lambda^2-554\lambda+840=0$$

这个方程的两个根是

$$\lambda_1=1.6095 \qquad \lambda_2=26.0905 \tag{3.99}$$

在这两个根中，仅仅较小的根是有意义的. 事实上，当在计算中再引进幂级数展开式后面的一些项时，较大根的变化是十分剧烈的，而较小根的变化是微小的. 譬如，我们在y的展开式中要计算出4次项的系数(即在计算中引入$y'''(1)$和$y'''(0)$)，那么应在引用公式(3.5)时分别取$m=3$和$m=4$. 这样我们又得到两个关系式：

$$b_0=\frac{71-10\lambda}{\lambda(73-\lambda)} \qquad b_0=\frac{679-18\lambda}{1680-201\lambda+\lambda^2}$$

从而，又得到一个确定λ的三次方程：

$$28\lambda^3-4074\lambda^2+80638\lambda-119280=0$$

按实质来说，上述方程仍然是二次方程，因为立方项只是一个不大的修正项. 我们先不管立方项，求得一个值λ_0，然后将$28\lambda_0^3$看

作修正项加到自由项里去. 这样所找到的最小根是

$$\lambda_1 = 1.608467$$

将这个λ_1与(3.99)中的λ_1相比较，看出较小根的变化是不大的. 这说明(3.99)中的λ_1已经是很靠近真正的最小值λ了.

因为在这个简单的例子中可以求得λ_1的精确值，所以我们可以进一步检验用上述方法得到结果的精确性. λ_1的真值由下式给出：

$$\lambda = \frac{1}{4} + \theta^2 \tag{3.100}$$

其中θ是超越方程

$$\mathrm{tg}\theta = 2\theta \tag{3.101}$$

的解. 这个方程的最小根是

$$\theta_1 = 1.1655618$$

从而

$$\lambda_1 = 1.608534$$

我们看出，当$m=2,3$时，逼近误差是$\eta = -0.0010$；而当$m=3,4$时，误差仅仅是$\eta = 0.000067$.

寻求特征值的Ritz方法是基于某一个积分泛函的极小化；因此，它只可用于自共轭的微分算子. 本节所介绍的方法并不要求微分算子或者边界条件是自共轭的. 我们可以在极为一般的条件下应用这个方法，甚至可以对非线性的微分方程应用这个方法.

三、边值问题

进一步引伸前一部分的思想，我们会发现，边界型求积公式不仅可以用来计算特征值，而且还可以用来求微分方程的实解.

作代换

$$x = \alpha x_1 \tag{3.102}$$

视x_1为新的自变量，α为常的参量. 当新的变量$x_1=1$时，旧的变量$x=\alpha$. 因此，新变量的函数值$y(1)$对应着旧变量的函数值

$y(a)$.

显然，微分方程(3.94)现在具有如下的形式

$$y'' + ay' + a^2\lambda y = 0$$

前节的数值表(3.95)现在应该相应地变为

$a_0 = 0,\quad a_1 = a,\quad a_2 = -a^2/2,\quad a_3 = a^3(1-\lambda)/6,\quad \cdots$

$y(0) = 0,\ y'(0) = a,\ y''(0) = -a^2,\ y'''(0) = (1-\lambda)a^3,\ \cdots$

而数值表(3.96)变成

$y(1) = b_0,\quad y'(1) = b_1,\quad y''(1) = -ab_1 - a^2\lambda b_0,$

$y'''(1) = (1-\lambda)a^2 b_1 + a^3\lambda b_0,\ \cdots$

与前节不同，这里λ应该是已知的，仅b_0和b_1是未知的. 和前节的步骤一样，这里得到的第一关系式(相当于前节的(3.97)式)是

$$b_1 - a = [6(-a^2 - ab_1 - a^3\lambda b_0) + (1-\lambda)a^3 - (1-\lambda)a^2 b_1 - a^3\lambda b_0]/12$$

于是，我们得到线性关系式

$$(6a^2\lambda + a^3\lambda)b_0 + [12 + 6a + (1-\lambda)a^2]b_1 = 12a - 6a^2 + (1-\lambda)a^3 \tag{3.103}$$

为了更简捷地得到第二个关系式，我们这样简化计算（显然要损失精确度）：在式(3.5)中取$m=2$，并对前三个边界值（不使用$y'''(0)$和$y'''(1)$）应用公式(3.5). 这样又可得到

$$b_0 = [6(a + b_1) + (-a^2 + ab_1 + a^2\lambda b_0)]/12$$

并由此得到新的线性关系式

$$(12 - a^2\lambda)b_0 - (6 + a)b_1 = 6a - a^2 \tag{3.104}$$

关于b_0和b_1解(3.103)和(3.104)，得到

$$b_0 = \frac{a(144 - 12\lambda a^2)}{144 + 72a + 12(1+\lambda)a^2 + 6\lambda a^3 + \lambda^2 a^4}$$

$$b_1 = a\,\frac{144 - 72a + 12(1-5\lambda)a^2 + 6\lambda a^3 + \lambda^2 a^4}{144 + 72a + 12(1+\lambda)a^2 + 6\lambda a^3 + \lambda^2 a^4}$$

回到原变量x，因为$y(a) = b_0$，$ay'(a) = b_1$. 故得出$y(x)$和

$y'(x)$的两个逼近式分别为

$$\widetilde{y}(x)=\frac{x(144-12\lambda x^2)}{144+72x+12(1+\lambda)x^2+6\lambda x^3+\lambda^2x^4} \tag{3.105}$$

和

$$\widetilde{y'}(x)=\frac{144-72x+12(1-5\lambda)x^2+6\lambda x^3+\lambda^2x^4}{144+72x+12(1+\lambda)x^2+6\lambda x^3+\lambda^2x^4} \tag{3.106}$$

$y''(x)$和其他的高阶微商均可由原来的微分方程(3.94)求得.

为了检验一下我们所找到的近似解的精确度，我们取一特例$\lambda=-2$；此时，边值问题的精确解实际是

$$y(x)=(e^x-e^{-2x})/3$$
$$y'(x)=(e^x+2e^{-2x})/3$$

近似解是(3.105)和(3.106). 特别，在$x=1$处，精确解的值是

$$y(1)=0.8610 \qquad y'(1)=0.9963$$

而近似解是

$$\widetilde{y}(1)=0.8571 \qquad \widetilde{y'}(1)=1$$

由此可以看出，精确程度还是比较好的.

第四章　复域上的降维展开公式

本章和第五章给出的降维展开公式都是精确的降维展开（即余项为零），但它们是在对被积函数加上一些限制条件时得到的.

本章内容概括了P.J.Davis[16]的有关降维展开的一些工作. Davis从复域上的Green公式出发，借助于Schwarz函数把解析函数在复域上的二重积分化为一个围道积分，再利用留数理论，最终得到一个精确降维展开公式. 由于对任何给定的调和函数总可以求出一个以其为实部的解析函数，因此我们也就能同时得出调和函数在复域上的精确降维展开公式. §2中给出了一些特殊区域上的具体展开公式. §3是从另一角度讨论降维展开问题，它提出这样一个方法，使得我们能对一些预先给出的复域上的精确降维公式，确定出它们所适合的区域.

§1. 解析函数二重积分的精确降维展开公式

在本节和下面两节中，我们约定一些记号. 在复平面中，记

$$z=x+iy \qquad \bar{z}=x-iy \tag{4.1}$$

引入算子

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{4.2}$$

$$dz=dx+idy \qquad d\bar{z}=dx-idy=\overline{dz} \tag{4.3}$$

若$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$则

$$\partial f/\partial z=(1/2)(u_x+iv_x-iu_y+v_y) \tag{4.4}$$

$$\partial f/\partial \bar{z}=(1/2)(u_x+iv_x+iu_y-v_y)$$

再若f是解析的，则

$$u_x=v_y \qquad\qquad u_y=-v_x$$

且

$$\begin{aligned}&\partial f/\partial z=u_x+iv_x=f'(z)\\&\partial f/\partial \bar{z}=0\end{aligned}\tag{4.5}$$

如果记

$$\overline{f(z)}=u(x,y)-iv(x,y)$$

则这时的$\overline{f(z)}$也是解析函数. 故类似可得

$$\begin{aligned}&\partial\,\overline{f(z)}/\partial z=0\\&\partial\,\overline{f(z)}/\partial \bar{z}=\overline{f'(z)}\end{aligned}\tag{4.6}$$

假如B表示复平面上的点集，则B的反射集合为

$$\overline{B}=\{\bar{z}\,|\,z\in B\}$$

若$f(z)$在B中是解析的，则$f(z)$被反射后是定义在$\overline{B}$中的解析函数，且由

$$\bar{f}(z)=\overline{f(\bar{z})}\tag{4.7}$$

所给定. 易见此时有

$$\overline{f(z)}=\bar{f}(\bar{z})\tag{4.8}$$

设∂B是区域B的依正方向绕行的边界. 下面是几个Green公式的变形：

$$\iint_B \overline{f'(z)}\,g(z)\,dxdy=\frac{1}{2i}\int_{\partial B}\overline{f(z)}\,g(z)\,dz\tag{4.9}$$

$$\iint_B \overline{f(z)}\,g'\,dxdy=-\frac{1}{2i}\int_{\partial B}\overline{f(z)}\,g(z)\,\overline{dz}\tag{4.10}$$

或者

$$\iint_B \overline{f'(z)}\,g'(z)\,dxdy=\frac{1}{2i}\int_{\partial B}\overline{f(z)}\,g'(z)\,dz$$

$$= -\frac{1}{2i}\int_{\partial B} f'(z) g(z)\, d\bar{z} \qquad (4.11)$$

特别，当$f(z)\equiv z$时，有

$$\iint_B g(z)\,dx\,dy = \frac{1}{2i}\int_{\partial B}\bar{z} g(z)\,dz \qquad (4.12)$$

上述公式成立的充分条件是f和g在B中解析，且在∂B上连续可微.

下面引入平面曲线的Schwarz函数.

假定给出了复平面上曲线C的直角坐标方程

$$\Phi(x,y)=0 \qquad (4.13)$$

注意到记号(4.1)，则式(4.13)又可写作

$$\Phi((z+\bar{z})/2,\ (z-\bar{z})/2i)=0 \qquad (4.14)$$

坐标z和$\bar{z}$有时被称为极小坐标或共轭坐标. 假如我们能够从(4.14)中解出$\bar{z}$:

$$\bar{z}=S(z) \qquad (4.15)$$

当Φ是解析函数时，则除了在一些奇点的附近外，方程(4.14)的解函数$S(z)$是解析的. 我们称$S(z)$为曲线C的Schwarz函数(参阅【2】【14】). 由于篇幅所限，我们不打算深入地谈论Schwarz函数，而仅给出一些大家所熟知的性质.

如果Φ是x，y的代数函数，则$S(z)$也是z的代数函数，并且是多值解析的. 如果C是闭合的解析曲线，则$S(z)$在一个完全含有C于其内部的环形域内具有一单值解析的分枝.

下面有关Schwarz函数的等式都在曲线C上成立.

$$\bar{z}=S(z)$$

$$z=re^{i\theta},\ r^2=z\bar{z}=|S(z)|^2,\ \theta=i\log(\bar{z}/z)/2=i\log(S(z)/z)/2 \qquad (4.16)$$

$$S'(z)=\frac{d\bar{z}}{dz}=\frac{dx-idy}{dx+idy}=\frac{1-iy'}{1+iy'} \qquad (4.17)$$

$$y' = -i\frac{1-S'(z)}{1+S'(z)} \tag{4.18}$$

$$|S'(z)| = 1 \tag{4.19}$$

如果曲线 C 通过 z_1 点，则在 z_1 点 C 的切线方程为

$$\bar{z} = S'(z_1)(z-z_1)+\bar{z}_1 \tag{4.20}$$

如果另有曲线D，并且 $T(z)$ 是 D 的 Schwarz 函数，则C和D之间的交角 θ 满足

$$\mathrm{tg}\theta = i(S'-T')/(S'+T') \tag{4.21}$$

特别，如果在公共点$S'=T'$，则两曲线相切，如果$S'=-T'$，则两曲线正交.

此外，在曲线C上还有

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4iS''(z)}{(1+S'(z))^3} \tag{4.22}$$

$$dzd\bar{z} = (dx+idy)(dx-idy) = dx^2+dy^2 = ds^2 = S'(z)dzdz \tag{4.23}$$

所以

$$ds = \sqrt{S'(z)}dz \tag{4.24}$$

曲线C的曲率

$$k = iS''/2(S')^{3/2} \tag{4.25}$$

$$|k| = |S''|/2 \tag{4.26}$$

有鉴于此，$S''(z)$ 也称为曲线C的“复曲率”.

封闭解析曲线C的Schwarz函数可以用C的映射函数来表示. 令 $w=M(z)$为任何一个将C及其内部1-1保角映射到闭的单位圆的解析函数，且$z=m(w)$为其逆. 则C的Schwarz 函数

$$S(z) = \bar{m}(1/M(z)) \tag{4.27}$$

这里$\bar{m}$为m的反射.

设 z 点是解析曲线C上的一点. 由于 $S(z)$ 满足泛函方程

$$\bar{S}(S(z)) = z \tag{4.28}$$

因此点 $z_R=\overline{S(z)}$ 是 C 内 z 点的 Schwarz 反射（参阅 Davis 和 Pollak【12】）.

我们回到降维展开的问题上去.

对于解析函数 $f(z)$，由(4.9)式，可以得到一类精确降维展开公式

$$\iint_B f(z)\,dxdy=\frac{1}{2i}\int_{\partial B}\bar{z}f(z)\,dz \tag{4.29}$$

$$\iint_B \bar{z}^n f(z)\,dx\,dy=\frac{1}{2i\,(n+1)}\int_{\partial B}\bar{z}^{n+1}f(z)\,dz \quad (n\geqslant 0) \tag{4.30}$$

它们将解析函数的二重积分精确地化为一维积分. 分离式(4.29)和(4.30)的实数部分和虚数部分，不难看出，式(4.29)和(4.30)不过是本书第三章中研究过的降维展开公式在复域上（关于解析函数)的变形. 下面,我们将针对复变函数积分的特点，介绍另一种精确降维展开方法. 在式(4.29)和(4.30)中，如果 ∂B 的 Schwarz 函数 $S(z)$ 易于求出而又形式简单的话，我们将 $\bar{z}$ 换成相应的函数 $S(z)$，得出

$$\iint_B f(z)\,dx\,dy=\frac{1}{2i}\int_{\partial B}S(z)f(z)\,dz \tag{4.31}$$

$$\iint_B \bar{z}^n f(z)\,dx\,dy=\frac{1}{2i\,(n+1)}\int_{\partial B}(S(z))^{n+1}f(z)dz \quad (n\geqslant 0) \tag{4.32}$$

往下可以利用Schwarz函数$S(z)$的具体形式，考虑用 Cauchy 定理来改变积分路径，再根据留数理论将(4.31)和(4.32)式中含有$S(z)$的围道积分精确地化为求积和式和若干定积分之和的形式. 这样可得出一类形式更为简单的精确降维展开公式. 具体例子见§2.

我们指出，上述精确降维展开方法还可以应用于调和函数的

二重积分上．事实上，设$u(x,y)$在Q上是调和的．则可对Q上任意一点(x_0,y_0)构造出函数

$$V(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y dx+u_x dy$$

使得$f(z)=u(x,y)+iV(x,y)$在Q上是单值解析的．然后依前述方法，用式(4.31)构造出

$$\iint_Q f(z)\,dxdy=\iint_Q [u(x,y)+iV(x,y)]\,dxdy$$

的精确降维展开公式．在得到的展开公式中分离出实部，就得出$\int_Q u dxdy$的精确降维展开公式．

§2．展开公式的应用

在本节中，我们将对上一节提出的降维展开方法举出若干应用实例，并且导出一些常见区域上的精确降维展开公式．下面常设$f(z)$是解析的．

1．先考虑 圆C：

$$|z-z_0|\leqslant r$$

C的边界∂C满足方程

$$(z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0)=r^2$$

由此解得∂C的Schwarz函数

$$\bar{z}=S(z)=\bar{z}_0+r^2/(z-z_0) \tag{4.33}$$

z_0点是$S(z)$的单极点．可以证明(参阅Davis和 Pollak【12】)，在所有的曲线中，仅有圆的Schwarz函数是z的有理函数．

当$z_0=0$时，

$$S(z)=r^2/z$$

此时可得如下求积公式

$$\iint_C \bar{z}^n f(z)\,dxdy=\frac{\pi r^{2n+2}n!}{2\pi i(n+1)!}\int_{\partial C}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

$$=\frac{\pi r^{2n+2}}{(n+1)!}f^{(n)}(0) \tag{4.34}$$

$$n=0,1,2,\cdots$$

当 $n=0$ 时，(4.34)式就是解析函数的中值定理.

再考虑半圆HC：

$$x^2+y^2\leqslant r^2 \qquad y\geqslant 0$$

令R为 HC 的边界∂HC上的圆弧段，并且 z 点依正向描出R. 则有

$$\iint_{HC} f(z)\,dx\,dy=\int_{\partial HC}\frac{1}{2i}\bar{z}f(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{2i}\int_{-r}^{r} xf(x)\,dx+\frac{1}{2i}\int_{R}\bar{z}f(z)\,dz$$

代入 $\bar{z}=S(z)=r^2/z$，则

$$\iint_{HC} f(z)\,dx\,dy=\frac{1}{2i}\int_{-r}^{r} xf(x)\,dx+\frac{r^2}{2i}\int_{R}\frac{f(z)}{z}dz$$

如果用R'表示 z 点依正向描出的半径为 $\varepsilon(<r)$ 的上半圆周. 由 Cauchy 积分定理得

$$\frac{r^2}{2i}\int_{R}\frac{f(z)}{z}dz=\frac{r^2}{2i}\int_{r}^{\varepsilon}\frac{f(x)}{x}dx+\frac{r^2}{2i}\int_{-\varepsilon}^{-r}\frac{f(x)}{x}dx$$

$$+\frac{r^2}{2i}\int_{R'}\frac{f(z)}{z}dz$$

注意到

$$\frac{r^2}{2i}\int_{R'}\frac{f(z)}{z}dz=\frac{r^2}{2}\int_{0}^{\pi}f(\varepsilon e^{i\theta})\,d\theta$$

故有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{r^2}{2i}\int_{R'}\frac{f(z)}{z}dz=\frac{\pi r^2}{2}f(0)$$

因此最后得出降维展开公式

$$\iint_{HC} f(z)\,dx\,dy = \frac{1}{2i}\int_{-r}^{r} x f(x)\,dx + \frac{r^2 i}{2}\int_{-r}^{r}\frac{f(x)}{x}dx$$

$$+\frac{\pi r^2}{2} f(0) \qquad (4.35)$$

其中，对于右端第二个积分，应计算其 Cauchy 主值.

2.椭圆B：

$$(x^2/a^2)+(y^2/b^2)\leqslant 1, \qquad a>b$$

的边界 ∂B 的 Schwarz 函数为

$$S(z)=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}z+\frac{2ab}{b^2-a^2}\sqrt{z^2+b^2-a^2}$$

$z=\pm\sqrt{a^2-b^2}$为$S(z)$的枝点. 如果把 z 平面沿着 $-\sqrt{a^2-b^2}\leqslant x \leqslant\sqrt{a^2-b^2}$ 割开，则 $S(z)$是定义在此新平面(设其为 z^*) 上的单值解析函数.

由于 $S(z)$ 的表达式的第一项在 B 内是正则的. 故有

$$\iint_{B} f(z)\,dx\,dy=\frac{ab}{i(b^2-a^2)}\int_{\partial B}\sqrt{z^2+b^2-a^2}\,f(z)\,dz$$

$$=\frac{ab}{b^2-a^2}\int_{\partial B}\sqrt{a^2-b^2-z^2}\,f(z)\,dz$$

由于函数$\sqrt{a^2-b^2-z^2}$在平面z^*上是单值的，所以我们可以把 ∂B 换成如下两条积分路径：一条在 X 轴的下方由 $-\sqrt{a^2-b^2}$ 走到$\sqrt{a^2-b^2}$，即z^*平面割口的下边. 此时$dz=dx$，被积函数变换为 $-\sqrt{a^2-b^2-x^2}\,f(x)$. 另一条路径在$X$轴的上方由$\sqrt{a^2-b^2}$走到 $-\sqrt{a^2-b^2}$，即平面z^*割口的上边. 此时$dz=-dx$，被积函数为$\sqrt{a^2-b^2-x^2}\,f(x)$. 因此得到降维展开公式

$$\iint_{B} f(z)\,dx\,dy=\frac{2ab}{a^2-b^2}\int_{-\sqrt{a_2-b_2}}^{\sqrt{a^2-b^2}}\sqrt{a^2-b^2-x^2}\,f(x)\,dx$$

$$(4.36)$$

如果在B的方程中取

$$a(\rho+\rho^{-1})/2 \qquad b=(\rho-\rho^{-1})/2$$

则得到焦点位于$z=\pm 1$，两半轴长为$a+b=\rho$的椭圆B_ρ. 由(4.36)得出B_ρ上的降维展开公式

$$\iint_{B_\rho} f(z)dxdy=\frac{1}{2}(\rho^2-\rho^{-2})\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}f(x)dx \tag{4.37$'$}$$

这个公式最早是在1965年由Davis利用第二类Tschebycheff 多项式的双正交性导出的.

3. 考虑玫瑰线：

$$r^{2m}=c+b\cos 2m\theta,\ 0<|b|<c,\ m=1,2,\cdots \tag{4.37}$$

注意到

$$\cos 2m\theta=\frac{z^{2m}+\bar{z}^{2m}}{2z^m\bar{z}^m}$$

由式(4.37)得

$$z^m\bar{z}^m=c+b(z^{2m}+\bar{z}^{2m})/2z^m\bar{z}^m$$

由此解出

$$\bar{z}=S(z)=z\left[\frac{c\pm\sqrt{c^2-b^2+2bz^{2m}}}{2z^{2m}-b}\right]^{\frac{1}{m}} \tag{4.38}$$

我们考察式(4.37)的一个特别. 令

$$m=1 \qquad c=a^2+2\varepsilon^2 \qquad b=2\varepsilon^2$$

则得到所谓重圆点四次曲线 ∂Q：

$$r^2=(a^2+2\varepsilon^2)+2\varepsilon^2\cos 2\theta=a^2+4\varepsilon^2\cos^2\theta \tag{4.39}$$

由式(4.38)，得到 ∂Q 的 Schwarz 函数为

$$S(z)=\frac{z(a^2+2\varepsilon^2)+z\sqrt{a^4+4a^2\varepsilon^2+4\varepsilon^2z^2}}{2(z^2-\varepsilon^2)} \tag{4.40}$$

记 ∂Q 围成的区域为 Q：

$$r^2 \leqslant a^2 + 4\varepsilon^2\cos^2\theta \tag{4.41}$$

由于点$z=\pm i\sqrt{a^2+(a^4/4\varepsilon^2)}$在曲线$\partial Q$的外面，故$S(z)$除以$z=\pm\varepsilon$为单极点外是单值解析的.

此时，由式(4.31)可得

$$\iint_Q f(z)\,dxdy = \frac{\pi}{2\pi i}\int_{\partial Q} S(z)f(z)\,dz$$

其中$S(z)$如式(4.40)所示. $S(z)$在$z=\varepsilon$点的留数为

$$(z-\varepsilon)\,S(z)\Big|_{z=\varepsilon} = \frac{\varepsilon(a^2+2\varepsilon^2)+\varepsilon\sqrt{a^4+4a^2\varepsilon^2+4\varepsilon^4}}{2(2\varepsilon)} = \frac{a^2}{2}+\varepsilon^2$$

类似可得到$S(z)$在点$z=-\varepsilon$的留数. 因此有下面的求积公式

$$\iint_Q f(z)\,dxdy = \pi\left(\frac{a^2}{2}+\varepsilon^2\right)(f(\varepsilon)+f(-\varepsilon)) \tag{4.42}$$

如果在(4.42)中令$f(z)=z^{2m}$，并做极坐标变换，可得如下积分恒等式

$$\int_0^{2\pi} e^{i2m\theta}(a^2+4\varepsilon^2\cos^2\theta)^{m+1}d\theta = (2m+2)\pi(a^2+2\varepsilon^2)\varepsilon^{2m} \tag{4.43}$$

特别，令$m=0$，则有

$$\iint_Q dxdy = Q\text{的面积} = \pi(a^2+2\varepsilon^2) \tag{4.44}$$

如果从式(4.32)出发，则有

$$\iint_Q \bar{z}^n f(z)\,dx\,dy = \frac{1}{2i(n+1)}\int_{\partial Q} S^{n+1}(z)f(z)\,dz$$

下面将式中右端的积分展开. 记

$$N(z) = \frac{z}{2}((a^2+2\varepsilon^2)+\sqrt{a^4+4a^2\varepsilon^2+4\varepsilon^2z^2}) \tag{4.45}$$

则$S^{n+1}(z)=[N^{n+1}(z)/(z-\varepsilon)^{n+1}(z+\varepsilon)^{n+1}]$，它以$z=\pm\varepsilon$为两个$n+1$阶的极点，除此而外，它在$\partial Q$内是解析的．所以得到如下求积公式

$$\iint_Q \bar{z}^n f(z)\,dx\,dy=\frac{\pi}{(n+1)!}\ \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial Q}\frac{N^{n+1}(z)}{(z-\varepsilon)^{n+1}(z+\varepsilon)^{n+1}}f(z)\,dz$$

$$=\frac{\pi}{(n+1)!}\left\{\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{N^{n+1}(z)f(z)}{(z+\varepsilon)^{n+1}}\right)\Bigg|_{z=\varepsilon}\right.$$

$$\left.+\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{N^{n+1}(z)f(z)}{(z-\varepsilon)^{n+1}}\right)\Bigg|_{z=-\varepsilon}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{(n+1)!}[a_{n0}f(\varepsilon)+a_{n1}f'(\varepsilon)+\cdots+a_{nn}f^{(n)}(\varepsilon)$$

$$+b_{n0}f(-\varepsilon)+b_{n1}f'(-\varepsilon)+\cdots+b_{nn}f^{(n)}(\varepsilon)]$$

(4.46)

其中a_{nk}和b_{nk}与f无关，它们可由展式(4.46)中导数算得．

设$u(x,y)$在Q上是调和的，利用上一节中说明的方法，不难得出如下精确成立的求积公式

$$\iint_Q u(x,y)\,dx\,dy=\pi\left(\frac{a^2}{2}+\varepsilon^2\right)(u(\varepsilon,0)+u(-\varepsilon,0))$$

(4.47)

式(4.47)是调和函数中值定理的推广．由此式还可以得到一个有趣的不等式．

令C_r表示圆$|z|\leqslant r$．如果取$b=\sqrt{a^2+4\varepsilon^2}$，由显明的不等式

$$a^2+4\varepsilon^2\geqslant a^2+4\varepsilon^2\cos^2\theta\geqslant a^2$$

可知

$$C_a\subseteq Q\subseteq C_b$$

如果u在C_b内是非负调和的，则有

$$\iint_{C_b} u\,dxdy\geqslant\int_Q u\,dx\,dy\geqslant\int_{C_a} u\,dxdy$$

所以

$$\pi(a^2+4\varepsilon^2)u(0,0)\geqslant\pi\left(\frac{a^2}{2}+\varepsilon^2\right)(u(\varepsilon,0)+u(-\varepsilon,0))\geqslant\pi a^2u(0,0)$$

最后得不等式

$$\frac{a^2+4\varepsilon^2}{a^2+2\varepsilon^2}u(0,0)\geqslant\frac{1}{2}(u(\varepsilon,0)+u(-\varepsilon,0))\geqslant\frac{a^2}{a^2+2\varepsilon^2}u(0,0) \tag{4.48}$$

再考虑式(4.37)的一个特殊形式，即 4 叶玫瑰线 ∂R_4：

$$r^4=a^4+2b^4\cos4\theta \qquad a^4>2b^4$$

由此不难解出

$$\bar{z}^2=S^2(z)=\frac{a^4z^2+z^2\sqrt{4b^4z^4+a^8-4b^8}}{2(z^4-b^4)} \tag{4.49}$$

易知，$S^2(z)$除以$z=\pm b$，$\pm bi$ 为单极点外，在∂R_4内是单值解析的.

设 ∂R_4 围成的区域为R_4，则其表达式为

$$r^4\leqslant a^4+2b^4\cos4\theta \qquad a^4>2b^4$$

由式(4.32)可得

$$\iint_{R_4}\bar{z}f(z)\,dxdy=\frac{\pi}{2}\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R_4}S^2(z)\,f(z)dz$$

再利用留数理论则可得下列求积公式

$$\iint_{R_4}\bar{z}f(z)\,dx\,dy=\frac{\pi a^4}{8b^2}[f(b)-if(ib)-f(-b)+if(-ib)] \tag{4.50}$$

不难看出，由于$S(z)$的奇异性，$\int_{R_4}f(z)dxdy$可以展成从b到 b_i 和从 $-b_i$ 到 $-b$ 的两个线积分的和.

4. 双纽线$\partial\mathscr{L}_r$ 的方程为

$$|p_n(z)|=r^n \tag{4.51}$$

其中 $p_n(z)=(z-z_1)\cdots(z-z_n)$. 关于这一类曲线的几何描述，参阅Walsh【62, p.55】. 由式(4.51)有

$$|p_n(z)|^2=p_n(z)\overline{p_n(z)}=p_n(z)\overline{p}_n(\overline{z})=r^{2n} \qquad (4.52)$$

其中，假如 $p_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k z^k$，则认为

$$\overline{p}_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\overline{a}_k z^k$$

从式(4.52)可解出

$$\overline{p}_n(S(z))=r^{2n}/p_n(z) \qquad (4.53)$$

其中$S(z)=\overline{z}$是$\partial\mathscr{L}_r$的 Schwarz 函数. 函数 $\overline{p}_n(S(z))$ 是具有极点 $z_1,\cdots z_n$的有理函数，因此$S(z)$可由式(4.53)解出，并且是z的代数函数.

作为特例，如果 $p_n(z)\equiv\overline{p}_n(z)\equiv z^n-1$，我们得到

$$\overline{z}=S(z)=\sqrt[n]{\frac{z^n+r^{2n}-1}{z^n-1}} \qquad (4.54)$$

当$n=2$时，式(4.54)表示 Cassini 卵形线. 我们把$r>1$时的 Cassini 卵形线记作 ∂OC，并把 ∂OC 围成的区域记作 OC. 由式(4.54)，∂OC 的Schwarz函数为

$$\overline{z}=S(z)=\sqrt[n]{\frac{z^2+r^4-1}{z^2-1}}$$

由于 $S(z)$的零点 $z=\pm i\sqrt{r^4-1}$ 在 ∂OC 的外部. 所以$S(z)$在沿 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 切开后的区域 OC 上是单值的. 再利用复变数积分的 Cauchy 定理，不难得到如下降维展开公式

$$\iint_{OC}f(z)dx\,dy=\frac{1}{2i}\int_{\partial OC}\sqrt{\frac{z^2+r^4-1}{z^2-1}}f(z)dz$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{x^2+r^4-1}{1-x^2}}f(x)dx \qquad (4.55)$$

如果$r<1$，则Cassini卵形线由两个叶瓣构成. $f(z)$ 在右边

的叶瓣所围成的区域上的二重积分也可以精确地化成类似于式(4.55)中的定积分.不过此时的积分区域要换成$\sqrt{1-r^4}\leqslant x\leqslant 1$.因为$z=1$和$z=\sqrt{1-r^4}$是函数$S(z)$的枝点.似类地，不难得到$f(z)$在左边叶瓣围成的区域上二重积分的降维展开式.

对于一般的双纽线，我们把式(4.51)中的r取得足够大，使得$\partial\mathscr{L}_r$成为一个包括含$z_1,\cdots,z_n$于其内部的闭曲线.记$\partial\mathscr{L}_r$围成的区域为$\mathscr{L}_r$：

$$|p(z)|\leqslant r^n$$

因为在$\partial\mathscr{L}_r$上有$\overline{p(z)}=r^{2n}/p(z)$.故由式(4.9)可得

$$\iint_{\mathscr{L}_r}\overline{p'(z)}f(z)\,dx\,dy=\frac{1}{2i}\int_{\partial\mathscr{L}_r}\overline{p(z)}\,f(z)\,dz$$

$$=\frac{\pi r^{2n}}{2\pi i}\int_{\partial\mathscr{L}_r}\frac{f(z)}{p(z)}dz \qquad (4.56)$$

当$z_i(i=1,\cdots,n)$互异时，则有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathscr{L}_r}\frac{f(z)}{p(z)}dz=\frac{f(z_1)}{p'(z_1)}+\cdots+\frac{f(z)}{p'(z_n)}=[f(z_1),\cdots,f(z_n)]$$

其中，右端表示$f(z)$关于z_1，z_2，$\cdots$，z_n点的n阶均差.在结点z_1，$\cdots$，z_n中含有多重点的情形下，上式右端的均差要换成相应的广义均差(参阅 Davis【13】，第三章).结合式(4.56)，有

$$\iint_{\mathscr{L}_r}\overline{p'(z)}f(z)\,dxdy=\pi r^{2n}[f(z_1),\cdots,f(z_n)] \qquad (4.57)$$

如果z_i是均匀分布的，则式(4.57)右端的均差就变成通常的n阶差分.设$p(z)=z(z-1)\cdots(z-n)$，且$\mathscr{L}_r$：$|p(z)|\leqslant r^{n+1}$.则得到式(4.57)的一个特例：

$$\iint_{\mathscr{L}_r}\overline{p'(z)}\,f(z)\,dxdy=\pi r^{2n+2}[f(0),f(1),\cdots,f(n)]$$

$$=\pi r^{2n+2}\Delta^n f(0)/n! \qquad (4.58)$$

如果取$f(z)=p'(z)$，则式(4.56)右端的围道积分为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathscr{D}_r}\frac{p'(z)}{p(z)}dz=n$$

这里，我们利用了幅角原理. 最后得到公式

$$\iint_{\partial\mathscr{D}_r}|p'(z)|^2 dxdy=n\pi r^{2n} \tag{4.59}$$

我们来说明式(4.59)的意义. 首先，我们用 $L^2(\mathscr{L}_r)$ 表示这样一个函数类，其中每一个函数 $f(z)$ 在 $\mathscr{L}_r$ 上是单值解析的，且满足

$$\iint_{\mathscr{D}_r}|f(z)|^2 dxdy<+\infty$$

易知$L^2(\mathscr{L}_r)$构成一个Hilbert空间. 如果我们把$f(z)$在$z_1,\cdots,z_n$点的均差记作$D(f)$，由式(4.57)，可得

$$D(f)=\frac{1}{\pi r^{2n}}\iint_{\mathscr{D}_r}\overline{p'(z)}\,f(z)\,dxdy$$

易知D是Hilbert空间 $L^2(\mathscr{L}_r)$ 上的有界线性泛函. 由熟知的泛函理论(参阅【74，p.193】，【13，p.218】)，可得

$$\left\|D\right\|^2_{\mathscr{D}_r}=\iint_{\partial\mathscr{D}_r}\left|\frac{p'(z)}{\pi r^{2n}}\right|^2 dx\,dy$$

$$=\frac{1}{\pi^2 r^{4n}}\iint_{\mathscr{D}_r}|p'(z)|^2 dx\,dy=\frac{n}{\pi r^{2n}}$$

所以，

$$\|D\|_{\mathscr{D}_r}=r^{-n}\sqrt{n/\pi} \tag{4.60}$$

假如$p(z)=(z-z_1)^{a_1}\cdots(z-z_n)^{a_n}$，$\mathscr{L}_r$：$|p(z)|\leqslant r^N$，其中$N=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 则由留数理论立得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathscr{D}_r}\frac{p'(z)}{p(z)}f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{n}a_k f(z_k)$$

所以从式(4.10)得出如下求积公式

$$\iint_{\mathscr{D}_r}|p'(z)|^2 f(z)\,dx\,dy=\pi\,r^{2N}\sum_{k=1}^{n}a_k f(z_k) \tag{4.61}$$

最后，我们利用式(4.57)给出多项式插值余项的一个表达式，并求出余项在L^2意义下的范数.

设$p_n(f;z)$是不超过n次的，以z_0，z_1，$\cdots$，z_n点作为结点(不一定互异)的$f(z)$的插值多项式(如果结点中含有多重点，则插值理解成是广义的). 插值余项记为

$$R_n(f;z)=f(z)-p_n(f;z) \tag{4.62}$$

如所知(参阅[13，p.67])，应有

$$R_n(f;z)=(z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_n)[f(z),f(z_0),\cdots,f(z_n)] \tag{4.63}$$

把z看作固定点，并置

$$P(t)=(t-z)(t-z_0)\cdots(t-z_n)\quad t=u+iv \tag{4.64}$$

则$P(t)$是t的$n+2$次多项式. 把r取得足够大，使得$z,z_0,\cdots,z_n$完全包含在

$$\mathscr{L}_r:|p(t)|\leqslant r^{n+2} \tag{4.65}$$

的内部.

因此由式(4.57)得到

$$R_n(f;z)=\frac{(z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_n)}{\pi r^{2n+4}}\iint_{\mathscr{D}_r}\overline{p'(t)}f(t)dudv \tag{4.66}$$

类似于前述，有

$$\begin{aligned}\left\|R_n\right\|^2_{\mathscr{D}_r}&=\iint_{\mathscr{D}_r}|h(t)|^2dudv\\&=\frac{|(z-z_0)\cdots(z-z_n)|^2}{\pi^2r^{4n+8}}\iint_{\mathscr{D}_r}|p'(t)|^2dudv\\&=\frac{|(z-z_0)\cdots(z-z_n)|^2}{\pi^2r^{4n+8}}(n+2)\pi r^{2n+4}\end{aligned}$$

这里，我们利用了式(4.59). 最后，

$$\left\|R_n\right\|_{\mathscr{B}}=\sqrt{\frac{n+2}{\pi}}\frac{|z-z_0|\cdots|z-z_n|}{r^{n+2}} \tag{4.67}$$

5．下面考虑可以1－1保形映射为单位圆的区域.

设B为包含$z=0$的单连通区域．并且

$$z=m(w) \qquad m(0)=0$$

将单位圆$|w|\leqslant 1$一一对应地保形映射成区域B．由式(4.10)，有

$$\iint_B \bar{z}^p f(z)\,dx\,dy=\frac{1}{2i(p+1)}\int_{\partial B}\bar{z}^{p+1}f(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{2i(p+1)}\int_{|w|=1}\overline{(m(w))}^{\,p+1}f(m(w))m'(w)\,dw$$

$$=\frac{\pi}{p+1}\;\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\bar{m}^{p+1}\left(\frac{1}{w}\right)f(m(w))m'(w)\,dw \tag{4.68}$$

特别，如果映射函数$m(w)$是次数为$q\geqslant 1$的多项式，即

$$m(w)=a_1w+a_2w^2+\cdots+a_qw^q \quad a_1,a_q\neq 0 \tag{4.69}$$

并且$|a_2|$，$|a_3|$，…，$|a_q|$相对于$|a_1|$来说足够小，则易知$m(w)$在单位圆$|w|\leqslant 1$内是单叶的，因此可将$|w|\leqslant 1$映成单连通的单叶区域．我们把$s=q(p+1)$次多项式$m^{p+1}(w)$写成如下形式：

$m^{p+1}(w)=b_1p!\,w^{p+1}+b_2(p+1)!\,w^{p+2}+\cdots+b_{s-p}(s-1)!\,w^s$ 其中b_i $(i=1,2,\cdots,\overline{s-p})$是由$a_j(j=1,2,\cdots,q)$所确定的．利用留数理论，由式(4.68)不难得到如下精确成立的求积公式.

$$\iint_B \bar{z}^p f(z)\,dx\,dy$$

$$=\frac{\pi}{p+1}\;\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\left(\bar{b}_1\frac{p!}{w^{p+1}}+\cdots+\bar{b}_{s-p}\frac{(s-1)!}{w^s}\right)$$

$$\cdot f(m(w))m'(w)\,dw$$

$$=\frac{\pi}{p+1}\left[\bar{b}_1\left(f(m(w))m'(w)\right)^{(p)}\Big|_{w=0}+\cdots\right.$$

$$+\overline{b}_{s-p}(f(m(w))\ m'(w))^{(s-1)}\Big|_{w=0}$$

$$=Q(D)f(0) \tag{4.70}$$

其中$Q(D)$表示$s-1$阶的线性微分算子，算子中含有的系数显然仅依赖于函数$m(w)$，而与$f(z)$无关.

请看一个简单的例子.

例 1 设

$$m(w)=w+aw^2,\ m'(w)=1+2aw,\ m''(w)=2a,$$

$$\overline{m}(w)=w+\overline{a}w^2$$

当$|a|$充分小(例如$|a|<1/2$时)，$m(w)$在单位圆$|w|\leqslant 1$内是单叶的. 并设$z=m(w)$将$|w|\leqslant 1$映射为z平面上的区域B. 由式(4.70)(相当于式中$p=0$的情形)，立得如下的求积公式

$$\iint_B f(z)\,dxdy=\pi\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} f(m(w))m'(w)\left(\frac{1}{w}+\frac{\overline{a}}{w^2}\right)dw$$

$$=\pi[(1+2|a|^2)f(0)+\overline{a}f'(0)] \tag{4.71}$$

下面再考虑$m(w)$的一个特殊情形，即$m(w)$为w的有理函数的情形. 设

$$P(w)=(w-\alpha_1)(w-\alpha_2)\cdots(w-\alpha_n) \tag{4.72}$$

$$R(w)=(w-\beta_1)(w-\beta_2)\cdots(w-\beta_p) \tag{4.73}$$

其中$0<|\alpha_i|<1$；β_j异于α_i，$i=1,\cdots,n$，$j=1,\cdots,n$.

又设

$$Q(w)=w^nP(1/w)=(1-\alpha_1 w)(1-\alpha_2 w)\cdots(1-\alpha_n w)$$

$$S(w)=w^pR(1/w)=(1-\beta_1 w)(1-\beta_2 w)\cdots(1-\beta_p w) \tag{4.74}$$

且当$a\neq 0$时，取

$$m(w)=\frac{awS(w)}{Q(w)}=\frac{aw(1-\beta_1 w)\cdots(1-\beta_p w)}{(1-\alpha_1 w)\cdots(1-\alpha_n w)}$$

$$=aw+\cdots \tag{4.75}$$

如果$|\alpha_i|$和$|\beta_j|$ $(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,p)$足够小，易知$m(w)$在单位圆$|w|\leqslant 1$内是单叶的．因此，$z=m(w)$将$w$平面上的单位圆$|w|\leqslant 1$一一对应地保角映射为$z$平面上的区域$B$.

首先注意到$m'(w)=[awS(w)/Q(w)]'$在$|w|\leqslant 1$内是正则的．其次有

$$\overline{m}\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{\overline{a}(1/w)(1-\overline{\beta}_1/w)\cdots(1-\overline{\beta}_p/w)}{(1-\overline{\alpha}_1/w)\cdots(1-\overline{\alpha}_n/w)}$$

$$=\frac{\overline{a}w^{n-p-1}(w-\overline{\beta}_1)\cdots(w-\overline{\beta}_p)}{(w-\overline{\alpha}_1)\cdots(w-\overline{\alpha}_n)}$$

$$=\frac{\overline{a}w^{n-p-1}\overline{R}(w)}{\overline{P}(w)}$$

因此，由式(4.68)(相当于$p=0$的情形)，可得

$$\iint_B f(z)\,dx\,dy=\pi\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}f(m(w))m'(w)\overline{m}\left(\frac{1}{w}\right)dw$$

$$=\pi\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}(m(w))m'(w)\frac{\overline{a}w^{n-p-1}(w-\overline{\beta}_1)\cdots(w-\overline{\beta}_p)}{(w-\overline{\alpha}_1)\cdots(w-\overline{\alpha}_n)}dw \tag{4.76}$$

如果$n\geqslant p+1$，并且α_i点$(i=1,\cdots,n)$互异的话，利用留数理论，不难从式(4.76)得出如下精确成立的求积公式

$$\iint_B f(z)\,dx\,dy=\pi\overline{a}\sum_{k=1}^{m}f(m(\overline{\alpha}_k))m'(\overline{\alpha}_k)\frac{\overline{\alpha}_k^{n-p-1}(\overline{\alpha}_k-\overline{\beta}_1)\cdots(\overline{\alpha}_k-\overline{\beta}_p)}{\overline{P}'(\alpha_k)} \tag{4.77}$$

如果点列α_i $(i=1,\cdots,n)$中含有多重点，则在由(4.76)利用留数理论得出的求积公式中，一般还含有$f(z)$在多重点处的导数值.

如果$n<p+1$，因为点$\alpha=0$也是极点，所以由式(4.76)导出的求积公式中一般还含有$f(z)$在$z=0$点$(m(0)=0)$的函数值，甚至还可能含有$f(z)$在$z=0$点的导数值(当$n-p-1<-1$时)．读者

不难自行导出这几种情形下的$\iint_B f(z)\,dxdy$的求积公式.

如果需要计算高次矩$\iint_B \bar{z}^r f(z)\,dxdy$，则由式(4.68)可得

$$\iint_B \bar{z}^r f(z)\,dxdy$$

$$=\frac{\pi}{r+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1} f(m(w))\,m'(w)$$

$$\cdot\ \bar{a}^{r+1} w^{(n-p-1)(r+1)} \frac{[(w-\bar{\beta}_1)\cdots(w-\bar{\beta}_p)]^{r+1}}{[(w-\bar{a}_1)\cdots(w-\bar{a}_n)]^{r+1}}\,dw$$

再利用留数理论，可知有如下一般形式的求积公式

$$\iint_B \bar{z}^r f(z)\,dx\,dy=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{r} c_{ki} f^{(i)}(m(\bar{a}_n))+\sum_{i=0}^{r} d_i f^{(i)}(0) \tag{4.78}$$

其中，c_{ki}、d_i与f无关，且当$n\geqslant p+1$时，$d_i=0\,(i=0,1,\cdots,r)$.

下面是两个具体的例子.

例 2 设

$$P(w)=w-a,\ Q(w)=1-aw,\ |a|<1,\ R(w)=1$$

则

$$m(w)=w/(1-aw) \qquad m'(w)=1/(1-aw)^2$$

$$\bar{m}(1/w)=1/(w-\bar{a})$$

因此得到

$$\iint_B f(z)\,dx\,dy=\frac{\pi}{2\pi i}\int_{|w|=1} f\left(\frac{w}{1-aw}\right)\frac{1}{(1-aw)^2}\cdot\frac{1}{w-\bar{a}}\,dw$$

$$=\frac{\pi}{(1-|a|^2)^2} f\left(\frac{\bar{a}}{1-|a|^2}\right)$$

不难发现，这里得到的公式不过是式(4.34)在$n=0$时的情形. 这是因为$z=m(w)$将单位圆$|w|\leqslant 1$映射为z平面上以$\bar{a}/(1-|a|^2)$为圆心，$1/(1-|a|^2)$为半径的圆域.

例 3 设

$$m(w)=w(1-\beta^2w^2)/(1-\alpha^2w^2),\quad 0<|\alpha|<1,\quad \beta\neq\pm\alpha$$

当α和β充分接近于0时，$m(w)$在$|w|\leqslant 1$内是单叶的. 又设$z=m(w)$将$|w|\leqslant 1$映射为z平面上的区域B. 则容易得出如下的求积公式：

$$\iint_B f(z)\,dxdy=Af(z^*)+Bf(0)+Af(-z^*) \qquad (4.79)$$

其中

$$A=\frac{1+|\alpha|^4-3\beta^2\overline{\alpha^2}+\beta^2\overline{\alpha^2}|\alpha|^4}{1-|\alpha|^4}$$

$$z^*=\frac{\overline{\alpha}(1-\beta^2\alpha^2)}{1-|\alpha|^4}\qquad B=(\overline{\beta}/\overline{\alpha})^2$$

§3. 核函数在降维展开中的应用

在本节中，我们需要解决这样的问题：能否确定出区域B，使得对于定义在B上的某一类函数而言，预先给出的降维展开公式或求积公式能够精确成立. 我们仅对L^2类函数给出这个问题的一种解决方法. 因为这一方法是利用所谓再生核函数得到的，为便于以后的叙述，我们先提出一些有关的事实（Davis【13，§12.6】）.

设S表示一维或多维的实变量或复变量空间中的一个点集，变量z，w，…等都表示S中的点，X表示由定义在S上的函数所构成的完备内积空间.

当z，w在S内变化时，如果二元函数$K(z,w)$满足下述两个条件，则$K(z,w)$称为完备内积空间X的再生核函数.

1. 对于任意固定的$z\in S$，$K(z,w)$作为w的函数都属于X；
2. 对每一个函数$f(w)\in X$及每一点$z\in S$，有下述等式成立：

$$f(z)=(f(w),K(z,w))_w$$

等式中的足码w表示内积是关于w变量进行的，z被看作是常量.

定理 1 (Aronszajn) 完备内积空间X具有再生核函数的充要条件为：对于任意固定的$z\in S$，线性泛函

$$L(f)=f(z)$$

是有界的，即对于X中的全体函数f，有

$$|L(f)|\leqslant C_z\|f\|$$

其中C_z与f无关.

这个定理的证明不难借助关于完备内积空间的线性泛函的一般形式的Fréchet-Riesz定理(见【13，p218】)完成.

定理 2 如果$K(z,w)$是完备内积空间X的再生核函数，且设L是定义在X上的有界线性泛函数. 则函数

$$r(z)=\overline{L_w K(z,w)}$$

属于X，且对于所有的$f\in X$，有

$$L(f)=(f(z),r(z))$$

其中L_w的足码w表示：当对$K(z,w)$施行运算L时，$K(z,w)$仅看作w的函数，而将z看作常量.

由Fréchet-Riesz定理，本定理是显明的.

因为$L^2(B)$ (B是复平面上的一个区域) 是完备内积空间 (Davis【13，p. 212】)，故由定理1易判定$L^2(B)$具有再生核函数$K(z,w)$.

如果区域B是有界的，或者可以1-1保形映射为有界区域，则$L^2(B)$也是Hilbert空间(【13，p213】). 设$\{\zeta_n(z)\}$是空间$L^2(B)$内的一个完全正交序列. 则不难由完全正交系的性质证得

$$K(z,w)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\zeta_n(z)}\zeta_n(w)$$

一般称此$K(z,w)$为区域B的Bergman核.

定理 3 设$t=m(z)$将区域B 1-1保形映射为单位圆C：$|t|$

$\leqslant 1$. 则$L^2(B)$具有的Bergman核函数可表示为

$$K(z,w)=\frac{\overline{m'(z)}\,m'(w)}{\pi(1-\overline{m(z)}m(w))^2}\quad z,w\in B \tag{4.80}$$

证 设m的逆为

$$z=M(t)$$

则有

$$m(M(t))=t$$

且

$$m'(M(t))M'(t)\equiv 1$$

对于任何f, $g\in L^2(B)$，通过变量替换，易得

$$(f,g)=\iint_B f(z)\overline{g(z)}\,dx\,dy=\iint_C f(M(t))\overline{g(M(t))}|M'(t)|^2 du dv$$

其中$t=u+iv$.

往证序列$u_n(z)=\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}(m(z))^n m'(z)$, $n=0, 1, \cdots$是空间$L^2(B)$的一个完全正交系. 事实上，由于

$$\sqrt{\frac{\pi}{n+1}}(f,u_n)=\iint_B f(z)\overline{(m(z))^n m'(z)}\,dx\,dy$$

$$=\iint_C f(M(t))\overline{t^n m'(M(t))}|M'(t)|^2 du\,dv$$

$$=\iint_C f(M(t))M'(t)\overline{t^n}\,dudv$$

如果$(f,u_n)=0$对所有的$n=0,1,\cdots$成立，由于1, t, t^2, $\cdots$是$L^2(C)$上的完全系，则必有

$$f(M(t))M'(t)\equiv 0$$

又$M'\neq 0$，因此$f\equiv 0$. 即$\{u_n(z)\}$构成$L^2(B)$上的完全系. 类似可证明$\{u_n\}$的正交性.

由前述，$L^2(B)$的Bergman核函数$K(z, w)$可利用完全正交

系$\{u_n(z)\}$写成如下形式

$$K(z,w)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\overline{(m(z))^n m'(z)}m(w))^n m'(w) \tag{4.81}$$

再注意到恒等式

$$(1-x)^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

可得出式(4.80).

现在我们来解决本节开头提出的问题.

如果预先给定的解析函数$f(z)$在区域B上的二重积分的求积公式或降维展式可表为如下的一般形式

$$\iint_B f(z)\,dxdy=L(f)\quad f\in L^2(B) \tag{4.82}$$

其中L可以看作完备内积空间$L^2(B)$上的有界线性泛函. 我们的任务是求出使式(4.82)精确成立的区域B. 很显然，这一问题并不总有解. 例如，对于

$$L(f)=f'(0)=\iint_B f(z)\,dxdy\quad f\in L^2(B)$$

置$f\equiv 1$，就会导出矛盾. 因此，我们下面给出的解决方法仅在问题的解存在时才有实际意义.

设$L^2(B)$上的Bergman核为$K(z,w)$，由定理2，$L(f)$又可以写成

$$L(f)=\iint_B f(z)L_w K(z,w)\,dxdy\quad f\in L^2(B) \tag{4.83}$$

为使式(4.82)和(4.83)一致，我们令

$$\overline{L_w K(z,w)}\equiv 1 \tag{4.84}$$

容易知道，求适合式(4.82)的区域B的问题与下面的问题等价：求出区域B，使式(4.84)在B上成立.

如果限于B是单连通区域，则由式(4.80)，可将式(4.84)变

为

$$1=\frac{1}{\pi}\overline{L_w\left(\frac{m'(z)m'(w)}{(1-m(z)m(w))^2}\right)} \tag{4.85}$$

其中$t=m(z)$将区域B 1-1保形映射为单位圆$|t|\leqslant 1$. 式(4.85)是关于映射函数$m(z)$的泛函微分方程. 如果方程(4.85)有解，则$m(z)$的逆映射就确定出所需的区域B. 然而，如同前述，方程(4.85)并不总是有解. 这自然使我们想到，是否存在如此的泛函类，使得适合式(4.82)或(4.84)的区域B总存在？如果存在，它又是否在某种意义(比如限于单连通区域)下唯一？这些问题尚待进一步研究.

为便于求解，我们将式(4.85)变形. 利用式(4.81)，可得

$$1\equiv\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\ (m(z))^n m'(z)\ \overline{L[(m(w))^n m'(w)]} \tag{4.86}$$

当$|z|$, $|w|\leqslant 1-\delta$时，式(4.86)右端的级数绝对一致收敛于1. 因此，

$$1=\frac{1}{\pi}\ \frac{d}{dz}\ \sum_{n=0}^{\infty}(m(z))^{n+1}\overline{L[(m(w))^n m'(w)]} \tag{4.87}$$

对等式两边分别从0到$z(|z|<1)$积分，得到

$$\pi z=m(z)\sum_{n=0}^{\infty}(m(z))^n\overline{L[(m(w))^n m'(w)]} \tag{4.88}$$

$$\pi\bar{z}=\overline{m(z)}\,L_w\sum_{n=0}^{\infty}\overline{[m(z)]}^n(m(w))^n m'(w)$$

$$=\overline{m(z)}\ L_w\left(\frac{m'(w)}{1-m(w)\overline{m(z)}}\right) \tag{4.89}$$

或者，

$$\pi\bar{z}=-\overline{m(z)}\ L_w\frac{d}{dw}\ \frac{1}{\overline{m(z)}}\log(1-\overline{m(z)}m(w))$$

$$-\pi\bar{z}=L_w\frac{d}{dw}\log\left(1-\overline{m(z)}m(w)\right) \tag{4.90}$$

我们来看几个具体的例子.

例 1 在式(4.82)中,设

$$L(f)=\pi R^2 f(0)$$

因此，由式(4.88)得

$$\pi z=m(z)\,\pi R^2\overline{m'(0)} \tag{4.91}$$

等式两边同时在$z=0$点关于z求导，得

$$\pi=\pi R^2|m'(0)|^2$$

因此

$$m'(0)=(1/R)e^{i\phi}$$

代入式(4.91)，可得

$$z=m(z)Re^{-i\phi}$$

或者

$$m(z)=(e^{i\phi}/R)z$$

于是得到所要求的区域 B：$|z|\leqslant R$(参阅§1).

例 2 在式(4.82)中,设

$$L(f)=\int_{-1}^{+1}f(x)\,dx$$

即有

$$\iint_B f(z)\,dx\,dy=\int_{-1}^{+1}(x)\,dx \quad f\in L^2(B) \tag{4.92}$$

相应地，式(4.90)变成

$$-\pi\bar{z}=\int_{-1}^{+1}\frac{d}{dw}\log\left(1-\overline{m(z)}m(w)\right)dw$$

$$=\log\left(1-\overline{m(z)}m(1)\right)-\log\left(1-\overline{m(z)}m(-1)\right)$$

$$=\log\left(\frac{1-\overline{m(z)}m(1)}{1-\overline{m(z)}m(-1)}\right) \tag{4.93}$$

为对称起见，我们附加一些条件：

$$m(0)=0 \qquad m(-1)=-m(1)=\alpha \tag{4.94}$$

在式(4.93)中分别令 $z=1$ 和 -1，可得恒等式

$$e^{-\pi}=(1-|\alpha|^2)/(1+|\alpha|^2) \tag{4.95}$$

$$e^{\pi}=(1+|\alpha|^2)/(1-|\alpha|^2)$$

于是

$$|\alpha|^2=(e^{\pi}-1)/(e^{\pi}+1)=(1-e^{-\pi})(1+e^{-\pi}) \tag{4.96}$$

或

$$\alpha=e^{i\theta}\sqrt{(1-e^{-\pi})/(1+e^{-\pi})} \qquad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \tag{4.97}$$

取 $\theta=0$，则

$$\alpha=\sqrt{(1-e^{-\pi})/(1+e^{-\pi})}\approx 0.958>1 \tag{4.98}$$

于是，由式(4.93)—(4.95)和式(4.98)，我们得到需要的映射函数

$$t=m(z)=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1-e^{\pi z}}{1+e^{\pi z}}\right)=-\frac{1}{\alpha}\tanh\frac{\pi}{2}z \tag{4.99}$$

而适合式(4.92)的区域 B 由式(4.99)的逆映射给出

$$z=M(t)=\frac{1}{\pi}\log\left(\frac{1-\alpha t}{1+\alpha t}\right)=-\frac{2}{\pi}\text{arctanh}\,\alpha t \tag{4.100}$$

注意到$0<\alpha\approx 0.958<1$，当t扫过单位圆周时，$\zeta=(1-\alpha t)/(1+\alpha t)$扫过位于半平面$\text{Re}\,\zeta>0$内的一个圆周，其中心在$((1+\alpha^2)/(1-\alpha^2),\ 0)$点，半径为$2\alpha/(1-\alpha^2)$. 于是由(4.100)知，$|t|=1$在$z$平面上的映象是单叶的. 并且$[-1,1]$完全含于这个映象的内部. 这是因为$|m(\pm 1)|=\alpha<1$，而且当$z$取实数时，$m(z)$的值也是实的. 因此，式(4.100)将单位圆$|t|\leqslant 1$映射为椭圆形的单连通域$B$，它的半长轴和半短轴分别为

$$a=\frac{1}{\pi}\log\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\approx 1.22$$

和

$$b=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctanh}\frac{2a}{1-a^2}\approx 0.486$$

顺便指出，由式(4.99)和(4.100)，不难求得对应于B的Schwarz函数为

$$S(z)=\overline{m}\left(\frac{1}{M(z)}\right)=\frac{1}{\pi}\log\left(\frac{1-e^{\pi}e^{\pi z}}{e^{\pi}-e^{\pi z}}\right) \qquad (4.101)$$

$S(z)$具有对数性奇点$z=\pm 1$，$\pm 2ki$，$k=0$，$1,\cdots$. 而在B内仅有奇点$z=\pm 1$. 在B内沿$-1\leqslant x\leqslant 1$切开，则$S(z)$在切开后所得的区域内是单值的. 利用函数$S(z)$，可以将区域B上解析函数(z)的二重积分精确降维展开成(4.92)的形式. 建议读者把它作为一个练习.

从式(4.36)和(4.101)的例子中看出，对于某些区域B来说，当其边界的Schwarz函数在B_S(即在B的实轴上割有裂缝后所成的区域)内正则时，积分

$$\iint_B f(z)\,dxdy$$

能够精确降维展开成

$$\int_{-1}^{+1}\mu(x)f(x)\,dx$$

的形式. 作为本节的结束，我们来构造具有这样性质的较一般性区域B.

设w_S为实轴上带有裂缝$[1/a,+\infty]$和$[-\infty,-1/a]$的w平面，其中$0<a<1$. 由映射

$$\begin{aligned} u&=\Gamma(w)=[1-\sqrt{1-a^2w^2}]/aw \\ w&=\gamma(u)=2u/[a(u^2+1)] \end{aligned} \qquad (4.102)$$

可以将w_S 1-1保形映射为u平面上的单位圆$|u|\leqslant 1$. 当$u=e^{i\theta}$时，有

$$w=\frac{2}{a(u+u^{-1})}=\frac{1}{a\cos\theta} \tag{4.103}$$

所以，当 $-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2$，$w$沿着右边裂缝由 $+\infty$走到$1/a$，再回到$+\infty$. 当$\pi/2\leqslant\theta\leqslant 3\pi/2$，$w$沿着左边裂缝由 $-\infty$走到 $-1/a$，再回到 $-\infty$.

设 $w=e^{i\zeta}$ 在u平面上的映象为C. 则C必含在 $|u|\leqslant 1$内，且它的方程为

$$C: \qquad u=\frac{1-\sqrt{1-a^2e^{2i\zeta}}}{ae^{i\zeta}} \tag{4.104}$$

又 $w=\pm a$ 在 u 平面上的映象为 $u=\pm\beta$，$\beta=(1-\sqrt{1-a^4})/a^2$.

设有满足下述条件(为便于以后叙述，所给的条件较强)的解析函数$H(u)$.

1. 函数$z=H(u)=a_1u+a_2u^2+\cdots$具有实系数，且在$|u|>1$内是正则的;

2. $H(u)$在$|u|\leqslant 1$内是连续的;

3. $H(u)$在C上和它的内部是单叶的. 并有$H(-\beta)=a$, $H(\beta)=b$, $a<b$.

把C及其内部由$z=H(u)$映射成的z平面上的区域称为 B，其边界为∂B. 设H的逆为h. 显然B包含实轴上的线段$[a,b]$.

易知，函数

$$z=m(w)\equiv H(\Gamma(w)) \tag{4.105}$$

在w_S内是正则的，在$|w|\leqslant 1$上是单叶的. 因此$z=m(w)$将$|w|\leqslant 1$ 1-1保形映射为B，且∂B是解析曲线.

将区域B沿$a\leqslant x\leqslant b$割开，记这样形成的域为B_S. 类似地，用C_S表示由C围成的带有裂缝$[-\beta,\beta]$的区域. 我们可以证明 ∂B的Schwarz函数在B_S内正则. 事实上，设m的逆为M. 则

$$w=M(z)\equiv\gamma(h(z))$$

因此(注意$\overline{m}=m$)，∂B 的Schwarz函数为

$$S(z)=H(\Gamma(1/\gamma(h(z))) \quad (4.106)$$

既然$h(z)$在B_S内是正则的，并且所取的值含于C_S内．则$\gamma(h(z))$在B_S内是正则的，并且所取的值含于带有裂缝$[-a,a]$的区域$|w|\leqslant 1$内．这样，$1/\gamma(h(z))$在B_S内是正则的，其值含于$w_S-\{w||w|\leqslant 1\}$. 因此，$\Gamma(1/\gamma(h(z)))$在B_S内正则，且函数值含于$\{u||u|\leqslant 1\}-C$内. 最后可知$S(z)=H(\Gamma(1/\gamma(h(z))))$在$B_S$内正则.

由于$H(u)$在$|u|=1$上是连续的，所以$S(z)$在B_S内的裂缝上边和下边都连续. 设裂缝的上、下边所对应的Schwarz函数分别为$S_l(x)$和$S_u(x)$. 下面求出它们的表达式.

我们有$z=x+iy$. 当x由a走到b，再回到a时，易知$1/\gamma(h(x))$由$-1/a$经∞到$1/a$，然后由$1/a$经∞再回到$-1/a$. 又当$u=e^{i\theta}$时，$w=1/a\cos\theta$，所以$\Gamma(1/\gamma(h(x)))=e^{i\theta}$. 并且当$x$由$a$到$b$时，$\theta$由$-\pi$变到0，当$x$由$b$到$a$时，$\theta$由0变到$\pi$. 因此，可得

$$S_l(x)=H(e^{i\theta}) \qquad -\pi\leqslant\theta\leqslant 0$$

$$S_u(x)=H(e^{i\theta}) \qquad 0\leqslant\theta\leqslant\pi \quad (4.107)$$

因为$S(z)$在B内是解析的，在$[a,b]$上是连续的．故有

$$\iint_B f(z)\,dx\,dy=\frac{1}{2i}\int_{\partial B}S(z)f(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{2i}\int_a^b(S_l(x)-S_u(x))f(x)\,dx \quad (4.108)$$

如果$H(u)$是奇函数，则

$$S_l(x)=H(e^{i\theta})$$

$$S_u(x)=H(e^{-i\theta})$$

$$S_l(x)-S_u(x)=2i\mathrm{I}_mH(e^{i\theta}).$$

于是，由式(4.108)得到

$$\iint_B f(z)\,dx\,dy=\int_{-b}^{b}I_mH(e^{i\theta(x)})f(x)\,dx \quad (4.109)$$

其中，$\theta(x)$由下面的式子确定

$$\cos\theta = a^2(h^2(x)+1)/2h(x) \tag{4.110}$$

更进一步，如果H又在实轴上定义为实函数，则

$$\iint_B \overline{z^p} f(z)\,dx\,dy = \frac{1}{2i(p+1)}\int_{-b}^{b}[H^{p+1}(e^{i\theta}) - H^{p+1}(e^{-i\theta})]f(x)\,dx \tag{4.111}$$

因为$H^{p+1}(e^{-i\theta}) = \overline{H^{p+1}(e^{\theta})}$，所以最后得到

$$\iint_B \overline{z^p} f(z)\,dx\,dy = \frac{1}{p+1}\int_{-b}^{b} I_m H^{p+1}(e^{i\theta}) f(x)\,dx \tag{4.112}$$

当解析函数的二重积分的精确降维展开式中含有定积分项时，例如式(4.108)和(4.112)，则可以考虑在展开式中带入这些定积分的具有最高代数精度的求积公式. 从而获得二重积分在此意义下的最优求积公式.

第五章　精确的降维展开法

在这一章，我们主要介绍L. J. Kratz[31]和B. L. Burrows[8]的工作. Kratz 的工作推广了A. Ghizzetti和A. Ossicini 的结果(参阅【23】第一、二章). 他利用Green公式和偏微分方程的解导出了一类精确的降维展开公式. 在§3中应用所得到的展开公式对一些特殊区域上的概率积分进行了估值. 显然，如果应用数值积分公式于上述精确降维展式中的边界型积分，则可得到一类边界型求积公式. 在§4中，我们以高维立方体为例，说明如何借助于数论上的一致分布点列来构造这类边界型公式. 实际上这些公式可达到任意指定的精度，并且其中某些公式的收敛阶实质上是不能再改进的. 顺便指出，由第三章的降维展开公式出发，也可以类似地用数论方法导出一类边界型求积公式(参阅【99】). §5给出了另一种精确的降维展开方法，即Burrows方法. 该方法的优点是一次就将高维积分(维数 $n\geqslant 2$)降成一维积分.

§1.　求积公式的构造与常微分方程的联系

本节的结果属于 A. Ghizzetti 和 A. Ossicini. 为了说清 Kratz 降维方法的思想，我们有必要从他们的工作谈起.

先约定一些记号. 令$[a,b]$表示有限区间，$L[a,b]$表示在$[a,b]$上Lebesgue可积的函数类. 又设$AC^k[a,b]$表示这样的函数类，其中每一函数的k阶导数$f^{(k)}(x)$在$[a,b]$上绝对连续. 如所知，若$f(x)\in AC^k[a,b]$，则$f^{(k+1)}(x)$在$[a,b]$上几乎处处存在且$f^{(k+1)}(x)\in L[a,b]$.

我们引入如下$[a,b]$上的n阶线性微分算子($n=1,2,3\cdots$)：

$$E=\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}$$

其中系数$a_k(x)$满足条件：

$$a_0(x)=1$$
$$a_k(x)\in AC^{n-k-1}[a,b],\quad (k=1,2,\cdots,n-1)$$
$$a_n(x)\in L[a,b]$$

显然算子E可作用于函数$u(x)\in AC^{n-1}[a,b]$，结果得出一个在$[a,b]$上几乎处处有定义的Lebesgue可积函数.

令

$$E_r=\sum_{k=0}^{r} a_k(x)\frac{d^{r-k}}{dx^{r-k}}\quad (r=0,1,\cdots,n-1)$$

表示E的缩减算子. 显然$E_n=E$. 又定义E的伴随算子为

$$E^*=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}a_k(x)$$

或写成另一形式

$$E^*=\sum_{k=0}^{n} a_k^*(x)\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}$$

其中

$$a_k^*(x)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{n-i}\binom{n-i}{k-i}a_i^{(k-i)}(x)\quad (k=0,1,\cdots,n)$$

注意到$a_k(x)$所满足的条件，可得

$$a_0^*(x)=(-1)^n$$
$$a_k^*(x)\in AC^{n-k-1}[a,b]\qquad (k=1,2,\cdots,n-1)$$
$$a_n^*(x)\in L[a,b]$$

因此算子E^*可作用于函数$v(x)\in AC^{n-1}[a,b]$，并得出一个在$[a,b]$上几乎处处有定义的Lebesgue可积函数.

完全类似地，可定义E^*的缩减算子为

$$E_r^* = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{r-k} \frac{d^{r-k}}{dx^{r-k}} a_k(x) \quad r=1,2,\cdots,n$$

根据这个定义，易知有递推公式

$$E_r^*(v) = -\frac{d}{dx} E_{r-1}^*(v) + a_r(x) v(x) \quad r=1,\cdots,n$$

读者不难自行证出 E^* 的伴随算子 $E^{**}=E$.

利用数学归纳法，我们不难证明：

$$v(x) u^{(h)}(x) - (-1)^h u(x) v^{(h)}(x)$$
$$= \frac{d}{dx} \sum_{i=0}^{h-1} (-1)^{h-i-1} u^{(i)}(x)\, v^{(h-i-1)}(x)$$

由E, E^*, E_r^*的定义及$a_k(x)$的性质，经过简单的推导，不难从上式得到如下的Green-Legrange等式，它在$[a,b]$上几乎处处成立.

$$v(x) E[u(x)] - u(x) E^*[v(x)] = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n-1} u^{(h)}(x) E_{n-h-1}^*[v(x)]$$

考察非齐次线性微分方程

$$E(u) = f(x)$$

其中$f(x) \in L[a,b]$. 设$u_i(x) \in AC^{n-1}[a,b]$ $(i=1,2,\cdots,n)$是相应齐次方程$E(u)=0$的一个基础解系，并设$U(x)\neq 0$为基础解系的Wronskian行列式. 则非齐方程的通解表为

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i(x) + \int_a^x K(x,\xi) f(\xi)\, d\xi$$

其中α_i是任意常数，$K(x,\xi)$是Cauchy预解核. 亦即$K(x,\xi)$为齐次方程$E(u)=0$的满足如下条件的特解：

$$\left[\frac{\partial^h}{\partial x^h} K(x,\xi)\right]_{x=\xi} = \delta_{h,n-1} \; (h=0,1,\cdots,n-1)$$

$K(x,\xi)$也可以写成如下形式

$$K(x,\xi) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) v_i(\xi)$$

其中函数 $v_1(x), v_2(x), \cdots, v_n(x)$ 由 n 阶线性方程组

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^{(h)}(x) v_i(x) = \delta_{h,n-1} \qquad (h=0,1,\cdots,n-1)$$

确定. 且上述方程组的行列式为 $U(x)$.

因此, 非齐次方程 $E(u)=f(x)$ 的解函数 $u(x)$ 可以写成

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)\left[\alpha_i + \int_a^x v_i(\xi) f(\xi) d\xi \right]$$

还可以证明, 由前述的 n 阶线性方程组 所确定的函数系 $(v_1(x), v_2(x), \cdots, v_n(x))$ 是齐次伴随方程 $E^*(v)=0$ 的一个基础解系, 它们的 Wronskian 行列式 $V(x)$ 满足

$$V(x) = 1/U(x)$$

并且非齐次方程

$$E^*(v) = g(x), \quad g(x) \in L[a,b]$$

的通解为

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i(x) + \int_a^x K^*(x,\xi) g(\xi) d\xi$$

其中 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是任意常数. 而预解核 $K^*(x,\xi)$ 满足关系式

$$K^*(x,\xi) = -K(\xi,x) = -\sum_{i=1}^{n} v_i(x) u_i(\xi)$$

因此

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x)\left[\beta_i - \int_a^x u_i(\xi)\, g(\xi) d\xi \right]$$

我们利用微分方程的解来构造求积公式. 考察积分

$$\int_a^b g(x) u(x) dx$$

其中权函数 $g(x)$ 假定在一具有正测度的集合上不等于零, 并且

$$g(x) \in L[a,b], \quad u(x) \in AC^{n-1}[a,b]$$

在 $[a,b]$ 上任意给定 $m \geqslant 1$ 个结点 $x_1, x_2, \cdots, x_m$, 使得

$$x_0 = a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_m \leqslant b = x_{m+1}$$

并且E仍表上面引进的n阶线性微分算子.

我们把具有如下形式的求积公式称为关于结点$x_1,x_2,\cdots,x_m$和线性微分算子E的基本求积公式

$$\int_a^b g(x)\,u(x)\,dx=\sum_{h=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}A_{hi}u^{(h)}(x_i)+R[u(x)]$$

其中常系数A_{hi}与$u(x)$无关. 并且当$u(x)$是方程$E[u(x)]=0$的解时，线性泛函$R[u(x)]$(即余项)为零.

下面导出构造关于结点$x_1,x_2,\cdots,x_m$和线性微分算子E的基本求积公式的一般法则.

设

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_{m-1}(x)\in AC^{n-1}[a,b]$$

是非齐次线性微分方程

$$E^*[\varphi(x)]=g(x)$$

的任意$m-1$个解. $\varphi_0(x)$和$\varphi_m(x)$是这个方程满足初值条件

$$\varphi_0^{(h)}(a)=0,\ \varphi_m^{(h)}(b)=0\qquad (h=0,1,\cdots,n-1)$$

的解. 于是

$$\varphi_0(x)=-\int_a^x K(\xi,x)g(\xi)d\xi$$

$$\varphi_m(x)=\int_x^b K(\xi,x)g(\xi)d\xi$$

利用Green-Lagrange等式，并注意到$E^*(\varphi_i)=g$，有

$$\varphi_iE(u)-gu=\frac{d}{dx}\sum_{h=0}^{n-1}u^{(h)}E^*_{n-h-1}(\varphi_i)\qquad (i=0,1,\cdots,m)$$

将此式两边分别在区间$[x_i,x_{i+1}]$上积分，再关于i求和，则有

$$\int_a^b gu\,dx=-\sum_{i=0}^{m}\left[\sum_{h=0}^{n-1}u^{(h)}E^*_{n-h-1}(\varphi_i)\right]_{x_i}^{x_{i+1}}+\sum_{i=0}^{m}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_iE(u)\,dx$$

由于$\varphi_0^{(h)}(a)=0$，$\varphi_m^{(h)}(b)=0$，故

$$[E^*_{n-h-1}(\varphi_0)]_{x=x_0}=0 \qquad [E^*_{n-h-1}(\varphi_m)]_{x=x_{m+1}}=0$$

$$h=0,1,\cdots,n-1$$

于是

$$-\sum_{i=0}^{m}\left[\sum_{h=0}^{n-1}u^{(h)}E^*_{n-h-1}(\varphi_i)\right]_{x_i}^{x_i+1}$$

$$=\sum_{h=0}^{n-1}\left\{-\sum_{i=1}^{m+1}u^{(h)}(x_i)\left[E^*_{n-h-1}(\varphi_{i-1})\right]_{x=x_i}\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{m}u^{(h)}(x_i)\left[E^*_{n-h-1}(\varphi_i)\right]_{x=x_i}\right\}$$

$$=\sum_{h=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}\left[E^*_{n-h-1}(\varphi_i-\varphi_{i-1})\right]_{x=x_i}u^{(h)}(x_i)$$

因此

$$\int_a^b g(x)u(x)\,dx=\sum_{h=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}\left\{E^*_{n-h-1}[\varphi_i(x)-\varphi_{i-1}(x)]\right\}_{x=x_i}u^{(h)}(x_i)$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\int_{x_i}^{x_i+1}\varphi_i(x)E[u(x)]\,dx$$

令

$$A_{hi}=\{E^*_{n-h-1}[\varphi_i(x)-\phi_{i-1}(x)]\}_{x=x_i}$$

$$(h=0,1,\cdots,n-1;\quad i=1,2,\cdots,m)$$

$$R[u(x)]=\sum_{i=0}^{m}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i(x)E[u(x)]\,dx$$

显然 A_{hi} 与 $u(x)$ 无关，并且有

$$E[u(x)]=0\Longrightarrow R[u(x)]=0$$

因此，上述求积公式就是关于结点 $x_i(i=1,\cdots,m)$ 和算子 E 的基本求积公式．故得下述法则：

1. 求出方程 $E^*[\varphi(x)]=g(x)$ 满足初值条件 $\varphi_0^{(h)}(a)=0$，$\varphi_m^{(h)}(b)=0(h=0,1,\cdots,n-1)$ 的解 $\varphi_0(x)$ 和 $\varphi_m(x)$；

2. 任意确定方程 $E^*(\varphi)=g$ 的 $m-1$ 个解 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，…，$\varphi_{m-1}(x)$；

3. 算出 A_{hi}；

4. 给出余项$R(u)$的表达式.

定理 1 若给定m个结点$x_1, x_2, \cdots, x_m$和mn个常数A_{hi}，并由上述法则确定出$\varphi_0(x)$和$\varphi_m(x)$. 又假设当$u(x)$为齐次线性微分方程$E(u)=0$的解时，线性泛函

$$R(u)=\int_a^b gu\,dx-\sum_{h=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}A_{hi}\,u^{(h)}(x_i)$$

为零. 则存在微分方程$E^*(\varphi)=g$的唯一确定的$m-1$个解$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_{m-1}(x)$使得

$$A_{hi}=\left\{E_{n-h-1}^{*}\left[\varphi_i(x)-\varphi_{i-1}(x)\right]\right\}_{x=x_i}$$

$$(h=0, 1, \cdots, n-1;\ i=1, \cdots, m)$$

$$R[u(x)]=\sum_{i=0}^{m}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i(x)E[u(x)]\,dx$$

证 在满足定理的条件下，要使式

$$[E_{n-h-1}^{*}(\varphi_i)]_{x=x_i}=A_{hi}+[E_{n-h-1}^{*}(\varphi_{i-1})]_{x=x_i}$$

成立，只需按如下方式选取$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_m(x)$即可. 因为$\varphi_0(x)$已经确定，故可由初值问题

$$\begin{cases}E^*(\varphi_1)=g(x)\\ [E_{n-h-1}^{*}(\varphi_1)]_{x=x_1}=A_{h1}+[E_{n-h-1}^{*}(\varphi_0)]_{x=x_1}\\ h=0, 1, \cdots, n-1\end{cases}$$

唯一地确定出$\varphi_1(x)$. $\varphi_1(x)$确定出后，再由初值问题

$$\begin{cases}E^*(\varphi_2)=g(x)\\ [E_{n-h-1}^{*}(\varphi_2)]_{x=x_2}=A_{h2}+[E_{n-h-1}^{*}(\varphi_1)]_{x=x_2}\\ h=0, 1, \cdots, n-1\end{cases}$$

唯一地确定出$\varphi_2(x)$. 依次可唯一地定出$\varphi_3(x), \cdots, \varphi_{m-1}(x)$. 最后定出$\varphi_m(x)$. 但是由于$\varphi_m^{(h)}(b)=0, h=0, 1, \cdots, n-1$，故仅需证明如此求出的$\varphi_m(x)$满足式

$$[E_{n-h-1}^{*}(\varphi_m)]_{x=b}=0 \qquad h=0, 1, \cdots, n-1$$

即可.

为此，我们仿照基本求积公式的导出过程，可得

$$\int_a^b gu\,dx=\sum_{h=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m}[E^*_{n-h-1}(\varphi_i-\varphi_{i-1})]_{x=x_i}u^{(h)}(x_i)$$
$$-\sum_{h=0}^{n-1}[E^*_{n-h-1}(\varphi_m)]_{x=b}u^{(h)}(b)+\sum_{i=0}^{m}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i E(u)\,dx$$

注意到 $R(u)$ 的表达式，以及 $\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 满足的条件，上式可写成

$$R(u)=-\sum_{h=0}^{n-1}[E^*_{n-h-1}(\varphi_m)]_{x=b}u^{(h)}(b)+\sum_{i=0}^{m}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i E(u)\,dx$$

如果用 $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 表示 $E(u)=0$ 的一组基础解系. 将 $u=u_j(j=1,2,\cdots,n)$ 代入上式，由定理的条件得

$$\sum_{h=0}^{n-1}u_j^{(h)}(b)[E^*_{n-h-1}(\varphi_m)]_{x=b}=0\quad j=1,2,\cdots,n$$

因为这个方程组的系数行列式是Wronskian行列式

$$\det(u_j^{(h)}(b))\neq 0$$

故有

$$[E^*_{n-h-1}(\varphi_m)]_{x=b}=0\quad(h=0,1,\cdots,n-1)$$

并且

$$R[u(x)]=\sum_{i=0}^{m}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i(x)E[\varphi(x)]\,dx$$

定理1证毕.

有关本节内容较详尽的论述，请参阅A. Ghizzetti和A. Ossicini的著作【23】的第一、二章.

§2. 高维求积公式的构造与偏微分方程的联系

本节将A. Ghizzetti和A. Ossicini的工作推广到高维空间；当被积函数满足某一类偏微分方程时，将它在有界区域上的高维积分精确地展开成低一维的积分.

我们约定一些记号. V_n仍表示n维欧氏空间中的一个有界闭

区域，它的$(n-1)$维边界曲面S_{n-1}是由参数方程组所界定的，或者在特别情形下，可假设它具有方程

$$\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$$

而在V_n中的点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$满足条件$\Phi\leqslant 0$，此处Φ是一个关于各变量具有连续偏导数的函数．$\partial x_n/\partial\nu$表示坐标变量x_n对曲面的向外法线向量的方向导数，亦即

$$\partial x_n/\partial\nu=(\partial\Phi/\partial x_n)\left[(\partial\Phi/\partial x_1)^2+\cdots+(\partial\Phi/\partial x_n)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

在二维情形，设S是平面上单连通的有界开集的闭包．T是S的边界，它是一个简单可求长的闭曲线．

为便于推导，我们假设所有的函数都足够光滑．设有二阶n维的偏微分算子[19]

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(X)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(X)u \tag{5.1}$$

其中$a_{ij}(X)\in H_n^2(V_n)$，$b_i(X)$和$c(X)\in H_n^1(V_n)$，且$H_n^a(V_n)$(整数$a\geqslant 1$)为定义在V_n上的某一函数类，对任意$f\in H_n^a(V_n)$有连续偏导数

$$f^{(i_1,\cdots,i_n)}=\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}},\quad 0\leqslant i_1+\cdots+i_n\leqslant an,\quad 0\leqslant i_\nu\leqslant a$$

存在．

M是L的伴随算子：

$$Mv=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2(va_{ij}(X))}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(vb_i(X))}{\partial x_i}+C(X)v \tag{5.2}$$

定理 2 设L和M是分别由式(5.1)和(5.2)所定义的偏微分算子．又设

$$p_i(X)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(X)\frac{\partial v}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}v\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}-b_i(X)v$$

假定在V_n上有

$$Mv=1$$

则对于定义在V_n上且满足$Lu=g$的所有函数u来说，有下述恒等式

$$\int_{V_n} u(X)\,dV = I_1 + I_2 + I_3 \tag{5.3}$$

其中

$$I_1 = \int_{V_n} v(X)\,g(X)\,dV \tag{5.4}$$

$$I_2 = \int_{S_{n-1}} \left[u(X) \sum_{i=1}^{n} \left(p_i(X) \frac{\partial x_i}{\partial \nu} \right) \right] dS \tag{5.5}$$

$$I_3 = \int_{S_{n-1}} \left\{ -v(X) \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}(X) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \right] \frac{\partial x_i}{\partial \nu} \right\} dS \tag{5.6}$$

证 令

$$r_i(X) = -v \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + u \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} + uv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} - b_i uv$$

容易验证

$$uMv - vLu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial x_i}$$

因此，由一般形的Gauss—Green—Ostrogradsky公式（3.8）可得

$$\begin{aligned}\int_{V_n} [uMv - vLu]\,dV &= \int_{V_n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial x_i} \right) dV \\ &= \int_{S_{n-1}} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(r_i \frac{\partial x_i}{\partial \nu} \right) \right] dS \\ &= I_2 + I_3\end{aligned}$$

其中，I_2和I_3由式(5.5)和(5.6)所定义．最后注意到定理的条件便得到式(5.3)．证毕．

如果取g使$I_1=0$，特别地，可取$g\equiv 0$. 则由(5.3)式可得到如下的精确降维展开公式

$$\int_{V_n} u(X)\,dV=\int_{S_{n-1}}\left(u(X)\sum_{i=1}^{n}p_i(X)\frac{\partial x_i}{\partial\nu}\right)dS$$
$$+\int_{S_{n-1}}\left\{-v(X)\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right]\frac{\partial x_i}{\partial\nu}\right\}dS \tag{5.7}$$

在二维情形，我们把积分区域记作S. 把偏微分算子(5.1)和(5.2)写成如下形式：

$$Lu=Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu \qquad (5.1)'$$

和

$$Mv=(Av)_{xx}+(2Bv)_{xy}+(Cv)_{yy}-(Dv)_x-(Ev)_y+Fv \qquad (5.2)'$$

其中，所有函数的自变量为x和y. 那么，积分恒等式(5.3)简化成

$$\iint_S u(x,y)\,dxdy=I_1+I_2+I_3 \qquad (5.3)'$$

其中，

$$I_1=\iint_S v(x,y)\,g(x,y)\,dxdy$$
$$I_2=\int_T u(-q\,dx+p\,dy)$$
$$I_3=\int_T v[(Bu_x+Cu_y)\,dx+(-Au_x-Bu_y)\,dy]$$
$$p=Av_x+A_xv+Bv_y+B_yv-Dv$$
$$q=Bv_x+B_xv+Cv_y+C_yv+Ev$$

特别，在式(5.3)′中取g使

$$I_1=\iint_S vg\,dxdy=0$$

例如，可取$g\equiv 0$. 则得到精确降维展开公式

$$\iint_S u(x,y)\,dxdy=\int_T u(-q dx+p dy)$$

$$+\int_T v[(Bu_x+Cu_y)dx+(-Au_x-Bu_y)dy] \tag{5.7)'}$$

我们仔细地考察式(5.7)和(5.7)′. 为了要用等式右边的积分去估值左边的积分，就需要从微分方程

$$Mv=1$$

中解出v，并求出v关于各变量的导数. 有时这比直接估值等式左边的积分要容易一些. 而且求出的函数v将对所有满足方程$Lu=g$(注意此处的g使$I_1=0$)的u都适合. 另外，如果在求v时，加上边界条件，即考虑定解问题

$$\begin{cases} Mv=1 \\ v\text{ 在边界上}=0 \end{cases}$$

则求出的v使(5.3)和(5.3)′中的$I_3=0$. 此时式(5.7)和(5.7)′的右端各剩下一项，即有

$$\int_{V_n} u(X)\,dV=\int_{S_{n-1}}\left(u(X)\sum_{i=1}^{n}p_i(X)\frac{\partial x_i}{\partial \nu}\right)dS \tag{5.8}$$

和

$$\iint_S u(x,y)\,dxdy=\int_T u(-q dx+p dy) \tag{5.8)'}$$

这为我们估值积分$\int_{V_n} u(X)\,dV$和$\int_S u(x,y)\,dx\,dy$带来很大方便.

在$I_1\neq 0$时，如果求得的v容易使I_1、I_2及I_3算出的话，式(5.3)和(5.3)′仍然是有价值的. 因为它们将困难的积分化成易求的积分，而且对所有满足$Lu=g$的函数u只需要求出一个函数v.

下面，我们针对一些典型的线性偏微分算子(椭圆型、抛物型、双曲型)，将式(5.3)具体化. 并且举出一些例子来说明这些

公式的应用.

对于椭圆型方程的情形，即在式(5.1)中，有

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

可以得到下面的

推论 1 如果 v 是 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(vb_i)}{\partial x_i}+cv=1 & \text{在}V_n\text{上}\\ v=0 & \text{在}S_{n-1}\text{上}\end{cases}\tag{5.9}$$

的解. 则对

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=g$$

的所有解u，有

$$\int_{V_n}u(X)\,dV=I_1+\int_{S_{n-1}}\left[u\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\quad\frac{\partial x_i}{\partial \nu}\right]\right)dS\tag{5.10}$$

这里的I_1定义如式(5.4)

在二维椭圆型方程的情形. 即在式(5.1)′中，有

$$A=C=1\qquad B=0$$

则式(5.10)可简化为

$$\iint_S u(x,y)\,dx\,dy=\iint_S v(x,y)g(x,y)\,dxdy$$
$$+\int_T u(-v_y dx+v_x dy)\tag{5.10$'$}$$

其中，v 是 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}v_{xx}+v_{yy}-(Dv)_x-(Ev)_y+Fv=1 & \text{在}S\text{上}\\ v=0 & \text{在}T\text{上}\end{cases}\tag{5.9$'$}$$

的解. u 是满足下述等式的任何函数：

$$u_{xx}+u_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=g$$

例 1 (圆盘上简化的波动方程). 设

$$S=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$$

$$Lu=u_{xx}+u_{yy}+\lambda^2 u$$

其中，$\lambda\neq 0$，且λR不是Bessel函数J_0的零点. 则式(5.9)′化成(采用极坐标形式)

$$\begin{cases} Mv=v_{rr}+r^{-1}v_r+r^{-2}v_{\theta\theta}+\lambda^2 v=1 & 在S上 \\ v=0 & 在T上 \end{cases}$$

这个定解问题的解为

$$v(r,\theta)=\lambda^{-2}[1-J_0(\lambda r)]/J_0(\lambda R)$$

因此，由式(5.10)′知，对于在S上所有满足$Lu=0$的函数u而言，有如下的精确降维展开公式：

$$\iint_S u(x,y)\,dx\,dy=-\frac{RJ_0'(\lambda R)}{\lambda J_0(\lambda R)}\int_0^{2\pi}u(R,\theta)\,d\theta$$

对于抛物型方程，即在式(5.1)中，有

$$a_{ij}=\begin{cases} 1 & 1\leqslant i=j\leqslant n-m, \quad 0<m<n \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

可以得到下面的

推论 2 设 v 是定解问题

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(vb_i)}{\partial x_i}+cv\doteq 1 \\ \quad 在V_n:[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]上 \\ v(a_1,x_2,\cdots,x_n)=\cdots \\ =v(x_1,\cdots,x_{n-m-1},a_{n-m},x_{n-m+1},\ \cdots,\ x_n) \\ =v(b_1,x_2,\cdots,x_n)=\cdots \\ =v(x_1,\cdots,x_{n-m-1},\ b_{n-m},\ x_{n-m+1},\ \cdots,\ x_n)=0 \end{cases} \tag{5.11}$$

的解. 则对所有满足

$$\sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=g \tag{5.12}$$

的函数u，有

$$\int_{V_n} u(X)\,dV = I_1 + \int_{S_{n-1}} u\left[\sum_{i=1}^{n-m}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\ \frac{\partial x_i}{\partial \nu}\right) - \sum_{i=n-m+1}^{n}\left(b_i v\frac{\partial x_i}{d\nu}\right)\right]\partial S \tag{5.13}$$

这里的I_1定义如式(5.4).

对于二维抛物型方程. 即在式(5.1)′中，有

$$A=1 \qquad B=C=0$$

式(5.13)可简化为

$$\iint_S u\,dxdy = \int_S vg\,dx\,dy + \int_T u(Evdx + v_x dy) \tag{5.13$'$}$$

其中，v是定解问题

$$\begin{cases} v_{xx} - (Dv)_x - (Ev)_y + Fv = 1 & \text{在}S\text{：}[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\text{上} \\ v(a,y) = v(b,y) = 0 & \text{对所有}\,y\in[a_2,b_2] \end{cases}$$

的解. u是满足下述等式的任何函数

$$u_{xx} + Du_x + Eu_y + Fu = g \tag{5.12$'$}$$

例 2 （矩形域上的热传导方程）. 设

$$\begin{cases} S=[a,b]\times[c,d] \\ Lu = u_{xx} - \lambda u_y \end{cases}$$

显然$v(x,y)=(x-a)(x-b)/2$为定解问题

$$\begin{cases} Mv = v_{xx} + \lambda v_y = 1 & \text{在}S\text{上} \\ v=0 & \text{在}x=a,b\text{时} \end{cases}$$

的解. 因此对所有满足$Lu=0$的函数u，由式(5.13)′可得到如下的精确降维展开公式：

$$\iint_S u\,dxdy = \frac{\lambda}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)[u(x,d)-u(x,c)]dx + \frac{b-a}{2}\int_c^d [u(b,y)+u(a,y)]dy$$

对于双曲型方程的情形，即在式(5.1)中，设

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & i=j=1\\ -1, & i=j\neq 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则有下面的推论：

推论 3 如果 v 是方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}-\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(vb_i)}{\partial x_i}+cv=1 \quad \text{在}V_n\text{上} \tag{5.14}$$

的解．则对于方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=g \tag{5.15}$$

的所有解函数u，下述等式成立：

$$\begin{aligned}\int_{V_n}udV=I_1&+\int_{S_{n-1}}u\Big[\Big(\frac{\partial v}{\partial x_1}-b_1v\Big)\frac{\partial x_1}{\partial \nu}\\&-\sum_{i=2}^{n}\Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}+b_iv\Big)\frac{\partial x_i}{\partial \nu}\Big]dS\\&+\int_{S_{n-1}}v\Big[\sum_{i=2}^{n}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \nu}-\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \nu}\Big)\Big]dS\end{aligned} \tag{5.16}$$

对于标准的二维双曲型方程，即在(5.1)′中，

$$B=1 \qquad A=C=0$$

当积分区域S取作

$$S=[a,b]\times[c,d]$$

时，可得到很简单的积分恒等式

$$\begin{aligned}\iint_S u(x,y)\,dx\,dy=-uv\Big|_{x=a,y=c}^{x=b,y=d}&+\iint_S vg\,dx\,dy\\&+\int_T u[(Ev-v_x)dx+(v_y-Dv)dy]\end{aligned} \tag{5.16$'$}$$

其中，v 是方程

$$v_{xy}-(Dv)_x-(Ev)_y+Fv=1 \quad \text{在}S\text{上} \tag{5.14$'$}$$

的解，u是满足下述等式的任何函数.

$$u_{xy}+Du_x+Eu_y+Fu=g \tag{5.15$'$}$$

例 3 （矩形域上的 Darboux 方程）．设

$$S=[a,b]\times[c,d]$$

$$Lu=u_{xy}+\lambda(x+y)^{-1}(u_x+u_y)$$

其中$\lambda>1$，并且为便于分析起见，假定矩形域S不与直线$x+y=0$相交.

易知

$$v(x,y)=(x+y)^2/(2-2\lambda)$$

是方程

$$Mv=v_{xy}-\lambda(x+y)^{-1}(v_x+v_y)+2\lambda(x+y)^{-2}v=1 \quad \text{在}S\text{上}$$

的解．则对于定义在S上，且满足方程$Lu=0$的所有函数u，可由式(5.16)$'$得出如下精确降维展开公式：

$$\begin{aligned}\iint_S u(x,y)\,dx\,dy=&\frac{2-\lambda}{2-2\lambda}\Big[\int_a^b(x+d)u(x,d)\,dx\\&-\int_a^b(x+c)u(x,c)\,dx+\int_c^d(b+y)u(b,y)\,dy\\&-\int_c^d(a+y)u(a,y)\,dy\Big]+\frac{1}{2\lambda-2}\big[(b+d)^2u(b,d)\\&-(b+c)^2u(b,c)-(a+d)^2u(a,d)+(a+c)^2u(a,c)\big]\end{aligned}$$

为便于应用，我们再建立定理 2 的一个推论．其证明是显然的.

推论 4 若 v 在V_n上满足

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial b_i v}{\partial x_i}+cv=1 \tag{5.17}$$

则对于方程

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Fu = 0 \tag{5.18}$$

的所有解函数$u(X)$，下述降维展开式成立

$$\int_{V_n} u\,dV = -\int_{S_{n-1}} \left(uv \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial x_i}{\partial \nu} \right) dS \tag{5.19}$$

对于二维情形，推论 4 可叙述如下. 设二元函数v在S上满足

$$-(Dv)_x - (Ev)_y + Fv = 1 \tag{5.17$'$}$$

则对于方程

$$Du_x + Eu_y + Fu = 0 \tag{5.18$'$}$$

的所有解 u，下述降维展开公式成立：

$$\iint_S u\,dxdy = \int_T uv(Edx - Ddy) \tag{5.19$'$}$$

以上，我们建立了对偏微分方程$Lu = g$的一切解 u 都有效的积分恒等式(5.3)和(5.3)$'$，其中L和g都是预先指定的. 当 $I_1 = 0$ 时，(5.7)和(5.7)$'$给出了一类精确的降维展开公式. 我们现在转向更有实际意义的问题，即我们能否对任意函数 u 建立降维公式. 原则上说来，对于光滑函数这是可以办得到的. 我们将仅对二维情形，说明解决这个问题的一种方法. 概括地说来，这个方法的思想是，建立一个适当的关于所给函数 u 的偏微分方程，求出适合其伴随方程的函数v，再借助于v构造出降维展开公式.

为了充分利用前述的结果，我们当然想到，如果能构造这样一个不超过二阶的线性偏微分算子L，使得对所给函数u,有

$$Lu = 0$$

则利用定理 2，就可以得出积分

$$\iint_S u(x, y)\,dxdy$$

的降维展开式. 比如，我们可以选择算子

$$\mathrm{L} = u_y(\partial/\partial x) - u_x(\partial/\partial y) \tag{5.20}$$

则对任何给定的光滑函数，有$\mathbf{L}u=0$. 如果能求得适合方程

$$Mv=-u_y v_x+u_x v_y=1 \tag{5.21}$$

的函数v，则由式(5.7)′，就得到如下精确成立的降维展开公式：

$$\iint_S u(x,y)\,dx\,dy=\int_T uv(-u_x dx-u_y dy) \tag{5.22}$$

如果方程(5.21)的解是近似的，则相应地可得到近似的降维展开公式.

若式(5.22)中的S是矩形区域，矩形的边平行于坐标轴. 利用分部积分法，由(5.22)式可得

$$\iint_S u\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_T u^2(v_x dx+v_y dy) \tag{5.23}$$

可以证明，即使S不是矩形域，式(5.23)仍然成立. 事实上，它不过相当于下面定理3中$\Phi(t)=t^2/2$的情形.

定理 3 设$u\in C^1(S)$，Φ是可微的一元函数，并且$v\in C^2(S)$满足

$$(-u_y v_x+u_x v_y)\Phi'(u)=u \tag{5.24}$$

则

$$\iint_S u\,dx\,dy=\int_T \Phi(u)\,dv \tag{5.25}$$

证 由 Green 公式，

$$\int_T [\Phi(u)v_x dx+\Phi(u)v_y dy]$$

$$=\iint_S [\Phi'(u)u_x v_y+\Phi(u)v_{yx}-\Phi'(u)u_y v_x-\Phi(u)v_{xy}]\,dx\,dy$$

$$=\iint_S u\,dx\,dy$$

证毕.

因为寻找满足式(5.24)的函数v是困难的(有时甚至是不可能的. 例如，如果在S中存在着这样的点，使得$u\neq 0$，而$\operatorname{grad} u=0$,

则方程(5.24)将是矛盾的)，因此定理 2 的使用是有限的. 如果不能从式(5.24)中解析地得出v，我们当然可以采用数值方法去逼近v. 但是这往往比直接去逼近$\iint_S u(x,y)dxdy$要更麻烦.

所幸的是，也存在着很多适合使用定理 3 的情况. 下面就是一些例子.

例 4 设$u=\lambda x+\mu y$，其中λ和μ为常数. 如果在方程(5.24)中取$\Phi_1(t)=t^2/2$，则可解得

$$v_1=(\lambda y-\mu x)/(\lambda^2+\mu^2)$$

如果取$\Phi_2(t)=t$，则可解得

$$v_2=[-\lambda\mu x^2+(\lambda^2-\mu^2)xy+\lambda\mu y^2]/(\lambda^2+\mu^2)$$

由式(5.25)，得到降维公式

$$\iint_S dx\,dy=\frac{1}{2}\int_T u^2dv_1 \qquad \iint_S u\,dxdy=\int_T u\,dv_2$$

例 5 设$u=x^2+y^2$，并假定$(0,0)\notin S$. 如果在方程(5.24)中取$\Phi(t)=t$，则可解得

$$v(x,y)=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\operatorname{arctg}(x/y) \qquad (5.26)$$

由式(5.25)，得到降维公式

$$\iint_S u\,dxdy=\int_T udv$$

其中v由式(5.26)给出.

§3. 概率积分的一个估值方法

我们利用前一节得到的降维展开公式(5.25)来估计二维概率积分的值. 应用式(5.25)的关键是寻求适合式(5.24)的函数v. 下面一个命题将帮助我们在很多情况下求得函数v.

命题 1 设θ和ψ是一元函数，u、v和w是二元函数. 且有

$$\partial(u,w)/\partial(x,y)=\theta(u)$$

和

$$v=\psi(u)w/\psi'(u)\theta(u)$$

则

$$\partial(\psi(u),v)/\partial(x,y)=\psi(u) \tag{5.27}$$

这个命题是显然的. 请读者自行验证之.

如果给定函数u, 并知道对应于u(即满足式(5.24))的函数v_1. 那么, 可以用命题1求得对应于一元函数$\psi(u)$(即满足将u换成$\psi(u)$的式(5.24))的函数v. 例如, 由前一节中的例5知, 当区域S不包含原点时, 函数

$$v_1(x,y)=-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\operatorname{arctg}(x/y)$$

适合方程(5.24), 此时方程(5.24)中的$\Phi(t)=t$. 因此有

$$\frac{\partial\left(x^2+y^2,\ -\frac{1}{2}(x^2+y^2)\operatorname{arc\,tg}(x/y)\right)}{\partial(x,y)}=x^2+y^2$$

设$\theta(t)=t$, $\psi(t)=\exp(-t)$, $u=x^2+y^2$, $w=v_1$, 那么由式(5.27)得

$$\frac{\partial\left(\exp(-x^2-y^2),\ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x/y)\right)}{\partial(x,y)}=\exp(-x^2-y^2) \tag{5.24$'$}$$

这里$\exp(t)$即e^t. 比较最后两个等式, 立知

$$v=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x/y)$$

为适合(5.24)$'$的函数. 故由式(5.25)得出公式

$$\iint_S \exp(-x^2-y^2)\,dx\,dy=\int_T \exp(-x^2-y^2)\,dv \tag{5.28}$$

须指出，S不包含原点的条件可以去掉. 事实上，当$(0,0)\in S$时，我们可以作一个狭长的与T相联的测度任意小的区域 R 包围住$(0,0)$点，并且 S/R 为单连通区域. 这样，我们转而估计积分

$$\iint_{S/R} u dx dy$$

的值来代替积分

$$\iint_S u\, dx dy$$

的估值. 并显然有如下误差估计：

$$\left|\iint_S u\, dx dy - \iint_{S/R} u\, dx dy\right| \leqslant \max_R |u| \cdot (R \text{ 的面积}) \tag{5.29}$$

下面导出积分$\iint_S \exp(-x^2-y^2) dx dy$ 的估值公式.

我们先将 Stieltjes 积分

$$\int_T \exp(-x^2-y^2) dv \qquad v=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x/y)$$

近似地化成离散和的形式，把T表示成参数t的函数，其中$0\leqslant t\leqslant 1$. 设

$$t_i = i/N$$
$$u_i = u(x(t_i), y(t_i))$$
$$v_i = v(x(t_i), y(t_i))$$

$i=0,1,\cdots,N$. 置

$$K_N \equiv \sum_{i=0}^{N-1} (v_{i+1}-v_i)(u_{i+1}+u_i)/2 \tag{5.30}$$

则有

$$\int_T u dv \approx K_N$$

如果在(5.28)中令

$$u=\exp(-x^2-y^2)$$

$$v=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x/y)$$

则可得到如下的边界型求积公式

$$\iint_S \exp(-x^2-y^2)dxdy \approx K_N \tag{5.31}$$

我们之所以用如此粗糙的公式(5.31)去估值积分

$$\iint_S \exp(-x^2-y^2)dxdy \tag{5.32}$$

是为了强调降维公式(5.28)本身所具有的优越性. 式(5.28)的优点在于即使我们所采用的求积技术不佳(如公式(5.31)), 也能通过估值$\int_T u\,dv$来较快地接近积分(5.32)的真值. 另外, 式(5.28)对区域S也没有特别的限制.

当然, 我们完全可以改造式(5.31), 得出积分(5.32)的更好的估计式. 例如, 在式(5.30)中采用外推算法; 或者采用Gauss型求积公式去估值$\int_T u\,dv$; 或者将T的方程用更好的方法参数化, 或者取不等距结点t_i, 等等. 这些工作可以留给有兴趣的读者自己去做.

下面是一些在特殊区域S上估值积分(5.32)的例子. 通过这些例子我们会看到, 公式(5.28)和(5.31)在具有不规则形状的区域上更能显示出它们的长处.

例 1 设$S=[1,3]\times[1,2]$. 因为积分

$$\int_1^2\int_1^3 \exp(-x^2-y^2)dxdy$$

易分解成两个一维定积分的乘积形式, 所以方法(5.31)与直接估值二维积分的标准方法不相上下. 设N为等分区间的个数, 下面是一些K_N值(见式(5.31)).

$N=8$ $\quad\quad$ $K_N=0.202225(-1)$

$N=40$　　　　$K_N=0.189045(-1)$

$N=200$　　　　$K_N=0.188548(-1)$

$N=1000$　　　　$K_N=0.188525(-1)$

与真值比较，K_{1000}已经达到 6 位小数的精度. 如果对积分

$$\int_1^2 \exp(-y)^2 dy \quad 和 \quad \int_1^3 \exp(-x^2) dx$$

用梯形法则估值，也需要相同个数的结点才能达到这个精度.

例 2 设$S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$. 因为$S$中包含了原点，所以需从 S 中去掉一矩形区域$R=[-1,10^{-6}]\times[-10^{-6},10^{-6}]$. 下面用公式(5.31)对 $\exp(-x^2-y^2)$在 S/R 上的积分进行估值（由式(5.29)知，误差在2×10^{-6}以内).

$N=8$　　　　$K_N=0.172523(1)$

$N=40$　　　　$K_N=0.197425(1)$

$N=200$　　　　$K_N=0.198539(1)$

$N=1000$　　　　$K_N=0.198584(1)$

真值的 6 位有效数字是1.98586.

例 3 设S是由$x+y=5.2$和$xy=1$所围成的区域. 正是在这样不规则的区域上，公式(5.31)才显示出它的优越性. 因为应用公式(5.31)只需要将边界用参数式给出，而不需要将积分区域规则化. 下面列出利用式(5.31)算出的结果

$N=8$　　　　$K_N=0.399689(-2)$

$N=40$　　　　$K_N=0.472084(-2)$

$N=200$　　　　$K_N=0.485760(-2)$

$N=1000$　　　　$K_N=0.488594(-2)$

我们知道公式(5.31)相当于定理 2 中$\Phi(t)=t$ 的情形. 如果取$\Phi(t)=t^2/2$和$\ln t$，利用命题 1 不难得到相应的降维公式

$$\iint_S \exp(-x^2-y^2)\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_T u^2 dw_1 \qquad (5.28)'$$

和

$$\iint_S \exp(-x^2-y^2)dx\,dy=\int_T \ln u\,dw_2 \qquad (5.28)''$$

其中 $u=\exp(-x^2-y^2)$,

$$w_1=\frac{1}{2}\exp(x^2+y^2)\mathrm{arctg}(x/y),$$

$$w_2=\frac{1}{2}\exp(-x^2-y^2)\mathrm{arctg}(x/y).$$

式(5.28)′和(5.28)″右端的积分可以分别用下面的求积和去近似:

$$L_N=\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{v_{i+1}}{u_{i+1}}-\frac{v_i}{u_i}\right)(u_i^2+u_{i+1}^2) \qquad (5.30)'$$

$$M_N=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(u_{i+1}v_{i+1}-u_iv_i)\ln(u_iu_{i+1}) \qquad (5.30)''$$

其中

$$v=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(x/y)$$

$$u_i=u(x(t_i),y(t_i)) \quad v_i=v(x(t_i),y(t_i)) \quad t_i=i/N$$
$$i=0,1,\cdots,N$$

例 4 设 $S=[1,3]\times[1,2]$. 类似于例1, 用(5.30)′和(5.30)″算得的结果去估计积分(5.32). 算得结果如下

$N=8$	$L_N=0.119334$	$M_N=0.139571(-1)$
$N=40$	$L_N=0.208619(-1)$	$M_N=0.186313(-1)$
$N=200$	$L_N=0.189307(-1)$	$M_N=0.188436(-1)$
$N=1000$	$L_N=0.188557(-1)$	$M_N=0.188522(-1)$

如果用式(5.31)去估计积分

$$\iint_S (2\pi\sigma_x\sigma_y)^{-1}\exp\left[-\frac{1}{2}(x^2/\sigma_x^2+y^2/\sigma_y^2)\right]dxdy$$

易知只要在式(5.30)中令

$$v=\sigma_x\sigma_y\operatorname{arctg}((x\sigma_y)/(y\sigma_x))$$

即可.

还有一些对概率积分估值的方法，有兴趣的读者请参阅文献【18】.

§4. 构造边界型求积公式的数论方法

显然，如果对§2精确降维公式中的边界型积分应用数值积分公式，则可得到一类边界型求积公式. 特别地，如果将数论中的一致分布点列用作数值积分公式的结点点列的话，我们就可用数论方法构造出一类边界型求积公式. 在本节中，我们以高维立方体域上的积分为例，说明这类公式的构造过程.

与第一章中的纯代数方法相比，这一方法无疑有很大的优越性. 如所知，一般用代数方法构造的边界型求积公式的代数精度有着所谓的"先天界限"，即其近似程度的改进是有限的. 例如Sadowsky在立方体域上构造的5次边界型公式[46]就代数精度而言是最佳可能的了，因为立方体域上不带微商项的边界型求积公式的代数精度不可能超过5次. 而本节对高维(维数$\geqslant 3$)立方体上的积分导出的边界型公式可以有任意预先指定的精度. 若N为求积结点的个数，则本节给出的公式的逼近阶分别为$O(N^{-\frac{1}{2}})$和$O(N^{-1})$. 当然，在这些公式里对被积函数是有一定约束的，即是前面所提到的，要求它为二阶线性偏微分方程的解.

须指出，对其它类型的一些降维展开公式，如第三章中的具有代数精度的降维展开公式等，也可以使用本节提供的数论方法去构造出边界型求积公式(参见【99】).

在本节中，我们记V_n为高维立方体域：

$$\{(X)\equiv(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid 0\leqslant x_i\leqslant 1, i=1,\cdots,n\}$$

由精确降维展开公式(5.7)，我们有

$$\int_{V_n} u\,dV=\sum_{i=1}^{n}\int_{S_{n-1}}\left[u(X)p_i(X)-v(X)\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\right]\frac{\partial x_i}{\partial \nu}dS$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{n-1}\left[F_i(X)\right]_{x_i=0}^{x_i=1}dV_{n-1}$$

其中

$$F_i(X)=u(X)p_i(X)-v(X)\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

$$\left[F_i(X)\right]_{x_i=0}^{x_i=1}=F_i(x_1,\cdots,x_{i-1},1,x_{i+1},\cdots,x_n)$$

$$-F_i(x_1,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_n)$$

显然，$F_i\in H_{n-1}^1(V_n)$．由熟知的均匀网求积 公 式的误差 估计式(参阅【1】第七章§2)，不难获得下述定理．

定理 4 设有质数$p\geqslant n-1$，且$N=p$或p^2．取

$$M_k=\left(\frac{k}{N},\frac{k^2}{N},\cdots,\frac{k^{n-1}}{N}\right)\quad k=1,\cdots,N$$

作为网点(均匀网点)．则当N足够大时，我们有

$$\int_{V_n} u\,dV=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\left[F_i\left(\frac{k}{N},\cdots,\frac{k^{i-1}}{N},x_i,\frac{k^i}{N},\cdots,\frac{k^{n-1}}{N}\right)\right]_{x_i=0}^{x_i=1}$$

$$+O\left(\frac{\log^{n-1}N}{\sqrt{N}}\right)\tag{5.33}$$

假定整数$r>1$，则任何自然数$k(\leqslant n)$可表为r进制：

$$k=k_0+k_1r+\cdots+k_Mr^M$$

$$0\leqslant k_j<r,\quad 0\leqslant j\leqslant M$$

定义$\varphi_r(k)$为

$$\varphi_r(k)=k_0r^{-1}+k_1r^{-2}+\cdots+k_Mr^{-M-1}$$

其中

$$M=[\log_r n]=[\log n/\log r]$$

因此每一个自然数k对应一个r进制小数$\varphi_r(k)$，反之亦然，即$k\longleftrightarrow\varphi_r(k)$. 由周知的Halton定理(参见【1】第九章§3)，易知有下述定理

定理 5 设p_i为第i个质数，取(Halton)网点M_k为

$$M_k=(\varphi_{p_1}(k),\varphi_{p_2}(k),\cdots,\varphi_{p_{n-1}}(k))$$
$$k=1,2,\cdots \tag{5.34}$$

则对于$N>p_{n-1}$，有

$$\int_{V_n} u\,dV=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\Big[F_i(\varphi_{p_1}(k),\cdots,\varphi_{p_{i-1}}(k),x_i,\varphi_{p_i}(k),\cdots,\varphi_{p_{n-1}}(k)\Big]_{x_i=0}^{x_i=1}+\rho_N \tag{5.35}$$

其中

$$|\rho_N|\leqslant n\,4^{n-1}C\prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{p_i}{\log p_i}\right)\frac{\log^{n-1}N}{N}$$

设有质数$p\geqslant5$，且$2n+1=p$. 定义ω_l为

$$\omega_l=2\cos\frac{2\pi l}{p}\quad(1\leqslant l\leqslant n-1)$$

其中，2是mod p的原根；或者2的阶数为r，并且$p\equiv7(\bmod 8)$

我们有网点M_k:

$$M_k=(\{\omega_1 k\},\cdots,\{\omega_{n-1}k\})\quad(k=1,2,\cdots) \tag{5.36}$$

$\{M_k,k=1,2,\cdots\}$即为著名的华-王点列.

由华-王网点求积公式的误差估计定理(参阅【1】第十一章§4定理6)，可得下述结论.

定理 6 对网点(5.36)，有

$$\int_{V_n} u\,dV = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\Big[F_i(\{\omega_1 k\},\cdots,\{\omega_{i-1}k\},x_i,$$

$$\{\omega_i k\},\cdots,\{\omega_{n-1}k\})\Big]_{x_i=0}^{x_i=1} + \rho_N \qquad (5.37)$$

其中

$$\rho_N = O(N^{-1+\varepsilon}), \quad N\to\infty$$

舍去(5.33)，(5.35)和(5.37)的余项，就分别得出用均匀网点，Halton网点及华-王网点构成的边界型数值积分公式：

$$\int_{V_n} u\,dV \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\Big[F_i\Big(\frac{k}{N},\cdots,\frac{k^{i-1}}{N},x_i,\frac{k^i}{N},\cdots,\frac{k^{n-1}}{N}\Big)\Big]_{x_i=0}^{x_i=1} \qquad (5.38)$$

$$\int_{V_n} u\,dV \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\Big[F_i(\varphi_{p_1}(k),\cdots,\varphi_{p_{i-1}}(k),x_i,$$

$$\varphi_{p_i}(k),\cdots,\varphi_{p_{n-1}}(k))\Big]_{x_i=0}^{x_i=1} \qquad (5.39)$$

$$\int_{V_n} u\,dV \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\Big[F_i(\{\omega_1 k\},\cdots\{\omega_{i-1}k\},x_i,$$

$$\{\omega_i k\},\cdots,\{\omega_{n-1}k\})\Big]_{x_i=0}^{x_i=1} \qquad (5.40)$$

假定u满足二阶线性偏微分方程

$$Lu = g$$

其中L定义如(5.1)(这里假定a_{ij}，b_i及c满足相应的条件)．则(5.38)，(5.39)及(5.40)的误差估计分别由定理4，5和6给出．

由定理4，5，6看出，用(5.38)，(5.39)及(5.40)式右端的求积和去近似积分$\int_{V_n} u\,dV$时，可以达到任意预先指定的精度．而三者的收敛速率分别为$O(N^{-\frac{1}{2}+\varepsilon})$，$O(N^{-1+\varepsilon})$和$O(N^{-1+\varepsilon})$，其中$\varepsilon$为任意小的正数．

著名的Ченцов定理告诉我们，无论怎样选取结点序列

$$M_k=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})\qquad(k=1,2,\cdots)$$

在解析函数类上，求积公式

$$\int_{V_n}u\,dV=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})+\rho_N$$

的误差阶ρ_N的阶不会比$O(N^{-1})$更高. 因此，式(5.35)及(5.37)的误差阶是不能再有实质性的改进了. 从这个意义上说，式(5.39)和(5.40)是一类最佳边界型求积公式.

§5. 利用测度函数构造降维公式的方法

在本节中，我们将给出另一种精确降维展开方法和一些有实用价值的近似求积公式. 本节方法的优点是可以将一个Lebesgue意义下的重积分一次化为测度函数的一维积分，因此它特别适用于激烈振荡的被积函数和奇异的被积函数. 本节的工作属于B. L. Burrows[8].

为说清这个降维方法的思想，我们先来看看一维的情形. 设$f(x)$是有界非负可测函数，且

$$0\leqslant y_0\leqslant f(x)\leqslant y_N\qquad x\in[a,b]$$

并记

$$\mu(y)=mE(x\mid f(x)\geqslant y,\ x\in I=[a,b])$$

因此

$$\mu(y_N)=0\leqslant\mu(y)\leqslant b-a=\mu(y_0)$$

考虑Lebesgue积分

$$\int_a^b f(x)\,dx\tag{5.41}$$

由 Lebesgue 积分定义知

$$\int_a^b f(x)\,dx=y_0\mu(y_0)+\lim_{\substack{n\to\infty\\ \max\lambda_i\to0}}\sum_{i=1}^{n}\mu(y_i)(y_i-y_{i-1})\tag{5.42}$$

其中 $\lambda_i = y_i - y_{i-1}$. 因此

$$\int_a^b f(x)\,dx = y_0\mu(y_0) + \int_{y_0}^{y_N}\mu(y)\,dy \qquad (5\cdot 43)$$

其中$\mu(y)$的积分是Riemann意义下的积分. 由于式(5·42)右边的极限存在,因此保证了对$\mu(y)$的积分也存在(参阅 Mikhlin【37】和Riesz和Nagy【44】).

因此为估值积分(5.41), 我们只需先求出 $\mu(y)$(精确的或近似的), 再去估计积分 $\int_{y_0}^{y_N}\mu(y)\,dy$(例如用通常的 Gaussian 或 Newton-Cotes 公式等等).

注意$f(x)\geqslant 0$的限制是可以去掉的, 只要定义

$$f_1(x) = \frac{1}{2}|f(x)| + f(x) \geqslant 0 \text{和} f_2(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)) \geqslant 0$$

则

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx$$

因此我们可以代替估计左端的积分, 而去考虑右端的两个积分.

如果$x_0\in(a,b)$是$f(x)$的无界奇点, 则我们可以分别估值 $f(x)$ 在$[a, x_0-\varepsilon]$和$[x_0+\varepsilon, b]$上的积分(如果$x_0 = a$或b, 则只需分别考虑$[a+\varepsilon_2, b]$和$[a, b-\varepsilon_1]$), 当 $\varepsilon_i\to 0(i=1,2)$时, 即得到 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分估值. Burrows[8] 给出的一些例子说明这个方法是很有效的.

在$\mu(y)$不能精确给出的情况下, 我们可以这样来估计 $\mu(y)$. 首先把$I=[a,b]$分成m个测度为p_i的子集I_i:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = b - a \qquad (5.44)$$

在I中任取$n(\geqslant m)$个$f(x)$的数据点$x_j(j=1,2,\cdots,n)$, 使得每个子集I_i中至少含有一点. 任意给定 $\overline{y}$,

$$y_0 \leqslant \overline{y} \leqslant y_N$$

我们估计 $\mu(\overline{y})$ 为

$$\mu(\overline{y}) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i p_i \tag{5.45}$$

其中

$$\begin{aligned} &\varepsilon_i = 0, \quad \text{若 } \overline{y} > \max_j f(x_j), \quad x_j \in I_i \\ &\varepsilon_i = 1, \quad \text{若 } \overline{y} < \min_j f(x_j), \quad x_j \in I_i \\ &0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant 1, \text{ 其他} \end{aligned} \tag{5.46}$$

例如对于

$$\min_j f(x_j) \leqslant \overline{y} \leqslant \max_j f(x_j) \tag{5.47}$$

我们可以这样来确定 ε_i：

$$\varepsilon_i = \frac{\max_j f(x_j) - \overline{y}}{\max_j f(x_j) - \min_j f(x_j)} \quad x_j \in I_i \tag{5.48}$$

特别，当数据点的个数 $n = m$ 时，我们可按下式决定 ε_i：

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{当 } f(x_i) \geqslant \overline{y}, \; x_i \in I_i \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{5.49}$$

设 $\{x_i, \; i = 1, 2, \cdots, n\}$ 是等分布点列，那么对任何有界 Riemann可积函数 $g(x)$，$x \in [a, b]$ 有

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right) \int_a^b g(x) dx \tag{5.50}$$

令

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } f(x) \geqslant \overline{y} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{5.51}$$

则有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_n}{n} = \frac{\mu(\overline{y})}{b-a} \tag{5.52}$$

其中 N_n 是满足 $f(x_i)\geqslant\overline{y}$ 的点 $x_i(i=1, \cdots, n)$ 的个数.

常用的取等分布点列的方法是 $(0\leqslant x\leqslant 1)$

$$x_i=(i\theta)=i\theta-[i\theta] \tag{5.53}$$

其中 $[i\theta]$ 是 $i\theta$ 的整数部分，而 θ 是任意无理数（参阅 Davis 和 Rabinowitz【15】).

转而考虑 Lebesgue 意义下的重积分

$$\int_A f(X)dX \tag{5.54}$$

设有限区域 A 的测度为

$$m(A)=V$$

类似于一维的情形，令

$$\mu(y)=\{X|X\in A,\ f(X)\geqslant y\}$$

则

$$\int_A f(X)dX=y_0\mu(y_0)+\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\lambda_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\mu(y_i)(y_i-y_{i-1})$$

$$=y_0\mu(y_0)+\int_{y_0}^{y_N}\mu(y)dy \tag{5.55}$$

这样，我们就把多重积分(5.54)降维表示成一个定积分

$$\int_{y_0}^{y_N}\mu(y)dy.$$

在大多数情况中，$\mu(y)$ 是不能精确表达的，因而需要对之估值. 类似于一维的情形，我们把 A 分成若干子集 I_i. 特别当 I_i 囿于曲面 $f(X)=c$ 时，对 $\mu(y)$ 的估值将尤为便利. 因为这时的 $\max\limits_{X\in I_i}f(X)$ 和 $\min\limits_{X\in I_i}f(X)$ 可以精确知道.

为方便计，我们可简洁地把数据点 $X_i\equiv(x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{pi})$ 取为 A 中的等分布点列. 例如，当 A 是 p 维方域时，点列 X_i 的第 j 个分量可取为

$$x_{ji}=(i\theta_j)=i\theta_j-[i\theta_j]$$

其中 $\theta_j(j=1,\cdots,p)$是p个相互无关的无理数. 因此对任何有理数集$\{a_j\}$有

$$\sum_{j=1}^{p}a_j\theta_j\neq 0$$

下面我们来看一个例子.

例 1 考察积分

$$J=\int_A f(X)dX=\frac{1}{\pi^3}\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi\frac{dxdydz}{3.75-\cos x-\cos y-\cos z}$$

$$\approx 0.30781 \tag{5.56}$$

如果用古典27点 Gauss 法则，则可求得积分J的近似值为0.30786. 但是要想进一步提高它的精确度则是困难的. 因为Gauss 法则收敛速度很慢，即使是结点个数增加到729点，也只能得到J的近似值为0.30780(参阅【15】).

如果我们用式(5.49)来近似测度函数$\mu(y)$，并取如下 8 个点作为数据点

$$X_i=\left(k\frac{\pi}{4},\ j\frac{\pi}{4},\ l\frac{\pi}{4}\right)\quad k,j,l=1,3 \tag{5.57}$$

这里 $I_i\ (i=1,2,\cdots,8)$ 是以X_i为中心的小立方体，其测度为 $p_i=\pi^3/8$. 然后对

$$\int_{y_0}^{y_N}\mu(y)dy$$

应用 5 点Gauss公式. 则可获得近似值为0.3064529. 注意，因为本例中的被积函数$f(X)\equiv(x,y,z)$是单调递减的，所以y_0和y_N可以精确求得，它们分别为$f(0,0,0)=1.3$，$f(\pi,\pi,\pi)=0.148148$.

如果采用等分布数据点，则由式(5.52)，我们可以通过数据点个数n的增加去逐步逼近 $\mu(\overline{y})$，因而可以用相应的积分估值J_n去逐步近似J. 例如可取等分布点列为

$$X_i=(x_i,y_i,z_i)$$

$$x_i=(i\sqrt{2} \quad y_i=(i\sqrt{3}) \quad z_i=(i\sqrt{7}) \qquad (5.58)$$

算得结果见表1.

要想用这种简单的估值方法去获得更精确的结果，就必需增大n. 即使如此，在被积函数可以精确地表达为多项式时，我们还不能指望这个方法优于古典方法. 因此这就需要我们寻求另外的估计$\mu(y)$的方法.

表 1

数据点的个数 n	J_n
30	0.3095236
35	0.3065273
40	0.3078608
45	0.3088979

设

$$L(f)=\mu(y_0)-k(f-y_0) \quad (k\geqslant 0) \qquad (5.59)$$

这是f的线性单调减函数，且有

$$L(y_0)=\mu(y_0) \qquad (5.60)$$

假定

$$L(f)>\mu(f) \qquad y_0<f\leqslant y_N \qquad (5.61)$$

并且用下式定义$\hat{f}$:

$$L(\hat{f})=0 \qquad (5.62)$$

则易得

$$\int_{y_0}^{\hat{f}} L(f)df>\int_{y_0}^{y_N}\mu(y)\,dy \qquad (5.63)$$

类似地，若

$$L(f)<\mu(f) \qquad y_0<f\leqslant y_N \qquad (5.64)$$

则

$$\int_{y_0}^{\hat{f}} L(f)df < \int_{y_0}^{y_N} \mu(y)dy \tag{5.65}$$

另设关于k的连续函数　$(0 \leqslant k < \infty)$

$$I(k) = \int_{y_0}^{\hat{f}} L(f)df \tag{5.66}$$

因此，假定存在k_1, k_2使$L(f)$分别满足式(5.61)和(5.64)，则有k_0使

$$I(k_0) = \int_{y_0}^{y_N} L(f)df \tag{5.67}$$

当然，只要$y_N > y_0$，且$mE(X \mid f(X) = y_0) = 0$，则这样的$k_1$和$k_2$是存在的. 另外，由前述，对于$L(f) = \mu(y_0) - k_0(f - y_0)$存在有$f_1$，$y_0 < f_1 \leqslant y_N$，使得

$$L(f_1) = \mu(f_1) \tag{5.68}$$

由此得到近似式

$$I(k) \approx \int_{y_0}^{y_N} \mu(y)dy \tag{5.69}$$

其中k是按照下述条件选择的

$$L(f_2) = \mu(f_2) \tag{5.70}$$

$y_0 < f \leqslant y_N$. 当然，如果$f_2 = f_1$，则式(5.69)精确成立. f_2最经济的选择方法是按下式确定出来：

$$\mu(f_2) = \frac{1}{2}\mu(y_0) \tag{5.71}$$

此时，

$$L(f) = \mu(y_0) - (f - y_0)\mu(y_0)/2(f_2 - y_0) \tag{5.72}$$

且由$\hat{f}$的定义，得

$$\hat{f} = y_0 + 2(f_2 - y_0) \tag{5.73}$$

因此

$$\int_{y_0}^{\hat{f}} L(f)df = (f_2 - y_0)\mu(y_0) \tag{5.74}$$

于是由式(5.55)，(5.66)，(5.69)和(5.74)，得

$$\int_A f(X)\,dX = y_0\mu(y_0) + \int_{y_0}^{y_N}\mu(y)dy \approx f_2\mu(y_0) \tag{5.75}$$

这一近似式是最经济的，因为只需要知道一点$(f_2, \mu(y_0)/2)$.

为了由式(5.71)得到f_2的近似估计，我们考察$f(X)$在立方体中心点的值f_3. 因为任何经过立方体中心的平面把立方体分成为体积相等的两部分. 特别，曲面$f(X)=f_3$在中心点的切平面也把立方体分为体积相等的两部分. 如果这个切平面很精密地近似于曲面$f(X)=f_3$，并且$f(X)$又是单调的话，则有

$$\mu(f_3) \approx \mu(y_0)/2 \tag{5.76}$$

因而

$$f_3 \approx f_2 \tag{5.77}$$

由式(5.77)及(5.75)，可得

$$\int_A f(X)dX \approx f_3\mu(y_0) \tag{5.78}$$

应用此式得到积分J的一个近似值为

$$J \approx 0.266\dot{6} \tag{5.79}$$

这一结果当然是很粗糙的. 为了改进它，我们把原立方体分成若干子立方体，并把积分J分成相应的若干项，对每一项分别用式(5.78)估值. 表 2 给出了$A[0,\pi;0,\pi;0,\pi]$分成n^3个相等子立方体时的计算结果. 因为$f(X)$关于x，y，z是对称的，所以计算量可以减少. 表 2 第三栏里给出需要进行估值的最少子立方体的个数.

由表 2 见，若取$J_n \approx J$，则当$n=5$时，就可得到精确到 5 位小数的近似值. 此时A被分为125个子立方域，但是只需在其中的35个立方域上进行估值即可. 而采用古典729点公式，也只能达到

4 位小数的精确度.

表 2

n	J_n	函数计算量
2	0.3054125	4
4	0.307796	20
5	0.307806	35
6	0.307807	56
8	0.307808	120

因为公式(5.55)是精确降维公式，所以估值积分(5.54)的误差是由估计$\int_{y_0}^{y_N}\mu(y)dy$引起的. 如果不计舍入误差，则细致分析出误差源有三：

(1) 由估计积分$\int_{y_0}^{y_N}\mu(y)dy$所用的方法产生的误差；

(2) 估计$\mu(\overline{y})$所产生的误差；

(3) 当y_0和y_N未知时，估计它们而产生的误差.

为考虑(1)中的误差，我们需考察函数$\mu(y)$. 当$\mu(y)$充分可微时，如果用Newton-Cotes公式和Gauss公式去估计积分

$$\int_{y_0}^{y_N}\mu(y)dy \tag{5.80}$$

易知当结点个数n无限增加时，误差E趋于零. 当$\mu(y)$连续而不可微时，利用Jackson定理(参阅【63】和【8】)，立知，随着$n\to\infty$，误差$E\to 0$.

当$\mu(y)$不连续时，我们仍可以用例1中介绍的方法去估计积分(5.80)，并且由下述定理建立它的收敛性.

定理 7 记落在第r个子立方体内的点为X_r，并且用y_N^r和y_0^r分别表示y在第r个子立方体内的最大值和最小值. 又记V和p

分别为原超正方体和子立方体的测度，且有

$$\mu(f(X_r))=p/2$$

则如下估计式成立（$0<\theta<1$）

$$\left|\int_{y_0}^{y_N}\mu(y)dy-\sum_{r=1}^{n}f(X_r)p\right|<\theta\max_r(y_N^r-y_0^r)V \tag{5.81}$$

证 考察第r个子立方体上对函数$\mu(y)$的积分，用例1中的方法对之估值所产生的误差为

$$E_r=\int_{y_0^r}^{y_N^r}\mu(y)dy-\int_{y_0^r}^{\hat{f}}L(f)df=\int_{y_0^r}^{\bar{f}}(\mu(f)-\hat{L}(f))df \tag{5.82}$$

其中

$$\hat{L}(f)=\begin{cases}L(f) & y_0^r\leqslant f<\hat{f}\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{5.83}$$

且

$$\bar{f}=\max(\hat{f},y_N^r) \tag{5.84}$$

注意到式(5.72)和(5 73)，易得

$$|\mu(f)-\hat{L}(f)|<p/2 \tag{5.85}$$

因而

$$|E_r|<(\bar{f}-y_0^r)p/2<(y_N^r-y_0^r)p \tag{5.86}$$

于是

$$|E_r|<\theta_r(y_N^r-y_0^r)p\qquad 0<\theta_r<1 \tag{5.87}$$

最后累计n个子立方体上的全部误差即得式(5.81).

由此定理，只要

$$\lim_{n\to\infty}\max_r(y_N^r-y_0^r)=0 \tag{5.88}$$

则误差(1)趋于零. 当$\mu(y)$连续时，式(5.88)自然成立. 当$\mu(y)$分段连续(其不连续点为有限)时，不难看出式(5.88)仍成立.

转而考虑误差(2). 分成三种情形：如果采用近似式(5.45)和(5.49)，并且将数据点取为等分布点列，则由式(5.52)知，误差(2)趋于零. 如果采用近似式(5.45)和(5.46)，则收敛性可由下述定理8保证. 如果采用例1中的方法去估计$\mu(\overline{y})$，则可用定理9建立它的收敛性.

定理 8 若$f(X)$在具有有限测度的点集A上有界且Riemann可积，记p_i的测度为I_i，且

$$\bigcup_{i=1}^{n} I_i = A \tag{5.89}$$

则

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \overline{p}\to 0}} \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i p_i\right) = \mu(\overline{y}) \tag{5.90}$$

其中$\overline{p} = \max p_i$，而ε_i定义如式(5.46).

证 因为$f(X)$是Riemann可积的. 故$f(X)$至多在一个测度为零的集合$B \subseteq A$上不连续. 在下面证明过程中出现的点集里都假设已除去属于集合B的点.

设数据点X_i，$i=1,2,\cdots,m$分布在全体子区间$I_i, i=1,\cdots,n$上. 且

$$\sup_{X \in I_i} f(X) = M_i \qquad \inf_{X \in I_i} f(X) = m_i \tag{5.91}$$

又定义阶梯函数

$$\underline{f}(X) = \sum_i m_i G_{I_i}(X) \quad \overline{f}(X) = \sum_i M_i G_{I_i}(X) \tag{5.92}$$

其中

$$G_{I_i}(X) = \begin{cases} 1 & X \in I_i \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{5.93}$$

又

$$\mu_{\underline{f}}(y) = m(X \mid \underline{f}(X) \geqslant y) \quad \mu_{\overline{f}}(y) = m(X \mid \overline{f}(X) \geqslant y) \tag{5.94}$$

因此

$$\mu_{\underline{f}}(y)\leqslant\mu(y)\leqslant\mu_{\underline{f}}(y) \tag{5.95}$$

用式(5.45)和(5.46)近似 $\mu(\bar{y})$，注意到式(5.91)，得

$$\mu_{\underline{f}}(\bar{y})\leqslant\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i p_i\leqslant\mu_{\underline{f}}(\bar{y}) \tag{5.96}$$

当 $n\to\infty$ 时，$\max p_i=\bar{p}\to 0$，且

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \bar{p}\to 0}}\bar{f}(X)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \bar{p}\to 0}}\underline{f}(X)=f(X) \tag{5.97}$$

于是

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ p\to 0}}\mu_{\bar{f}}(y)=\lim_{\substack{n\sim\infty\\ \bar{p}\to 0}}\mu_{\underline{f}}(\bar{y})=\mu(\bar{y})$$

最后

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \bar{p}\to 9}}\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i p_i\right)=\mu(\bar{y}) \tag{5.98}$$

定理8证毕．

近似估计$\mu(\bar{y})$的第三种方法在例 1 的解中给出．在那里我们建立了近似式

$$f(X_C)\approx f(\hat{X}) \tag{5.99}$$

其中 X_C 是子超正方体的中心，而 $f(\hat{X})$满足

$$\mu(f(\hat{X}))=p/2 \tag{5.100}$$

p是子超正方体的测度．我们还假定$f(X)$单调．

假定$f(X)$是可微的，则$f(X)$在 $X=X_C$ 点的切平面T 的方程为

$$(X-X_C)\nabla f(X_C)=0 \tag{5.101}$$

且对于切平面上任何一点有

$$f(X)=f(X_C)+(X-X_C)\nabla f(\theta) \tag{5.102}$$

θ为平面T上某一点．

定理 9 设平面T'表示曲面 $f(X)=f(X_C)$ 在 X_C 点的切平

面. 则平面T'上存在一点$\hat{X}$满足式(5.100)及

$$|f(\hat{X})-f(X_C)|<kh \tag{5.103}$$

其中h是超立方体V_n每边的长度,k是固定常数.

证 设

$$\bar{f}=\sup_{X\in T'\cap V_n} f(X) \qquad \underline{f}=\inf_{X\in T'\cap V_n} f(X) \tag{5.104}$$

因为$f(X)$是单调的,且T'将超正方体分为体积相等的两部分(注意到X_C为V_n的中心点). 故

$$\mu(\bar{f})\leqslant p/2\leqslant\mu(\underline{f})$$

因此在T'上存在一点$\hat{X}$满足式(5.98)及(5.100). 由此

$$|f(\hat{X})-f(X_C)|\leqslant\sup_X|\nabla f(X)|\,\|\hat{X}-X_C\| \tag{5.105}$$

其中$\|\cdot\|$为 Euclid 模. 又

$$\|\hat{X}-X_C\|<\frac{h}{2}\sqrt{M} \tag{5.106}$$

其中h是超正方体V_n的边长,M是空间的维数.

令

$$k=\frac{\sqrt{M}}{2}\sup_X|\nabla f(X)|$$

即可得到式(5.103). 定理 9 证毕.

由此定理知,若记

$$f(\hat{X})=f(X_C)-E(h)$$

则

$$\lim_{n\to 0}E(h)=0 \tag{5.107}$$

在本节例 1 中,由于对n个子超正方体建立了式(5.99),故得到近似式

$$\sum_{r=1}^{n}f(X_r)\,p\approx\sum_{r=1}^{n}f(\hat{X}_r)p \tag{5.108}$$

其中X_r是子正方体的中心，而$\widehat{X}_r$满足

$$\mu(f(\widehat{X}_r))=p/2$$

下面用定理8分析式(5.108)的误差

$$E=\sum_{r=1}^{n}E_r(h)p \tag{5.109}$$

设V为原超正方体的测度，则

$$|E|\leqslant \operatorname{man}_{r}|E_r(h)|\sum_{r=1}^{n}p\leqslant \max_{r}|E_r(h)|V \tag{5.110}$$

这说明当子超正方体的个数$n\to\infty$，亦即$h\to 0$时，近似过程(5.108)是收敛的.

下面考虑误差(3). 设

$$y_N=\sup_{X\in A/B}f(X) \qquad y_0=\inf_{X\in A/B}f(X)$$

其中A是超正方体中的点集，$B\subseteq A$是$f(X)$的不连续点的集合. 我们若假定$f(X)$为Riemann可积，则$mB=0$. 往下恒设数据点取自A/B. 为估计y_0和y_N，我们在前面采用的近似式为

$$y_N\approx\max_{j}f(X_j) \qquad y_0\approx\min_{j}f(X_j)$$

其中X_j，$j=1$，…，m是数据点. 当把超正方体分为n个子区域I_i时，每个I_i至少包含了$\{X_i\}$中的一点. 在这些前提下，可建立下面的定理.

定理 10 设$\overline{p}=\max_{i}p_i$，p_i为子区域I_i的测度，则

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \overline{p}\to 1}}\max_{j}f(X_j)=y_N \tag{5.111}$$

证 $f(X)$在A/B上是连续且有界的，故能达到其上、下确界. 假定$f(\overline{X})=y_N$，且在某一剖分下，$\overline{X}\in I_i$. 对充分小的p_i，任意的$\varepsilon>0$，有

$$f(\overline{X})-f(X_j)<\varepsilon \quad \overline{X}_j\in I_i$$

于是

$$f(\overline{X})-\varepsilon<f(X_i)<\max_{X_i} f(X_i)$$

$$f(\overline{X})-\max_{X_i} f(X_i)<\varepsilon$$

由于ε是任意的，故式(5.111)成立.

类似可建立估计y_0的收敛性定理.

Burrows方法是一个有效的数值求积方法，特别在被积函数不是多项式时，该方法明显地优于古典的乘积法则.

另外，Burrows方法也是一个很好的精确降维方法. 与前述三个降维方法(徐利治方法，Davis方法和Kratz方法)相比较，其优点之一是可以将n维积分一次降成一维积分. 而前述三个方法的基础是Gauss-Green-Ostrogradsky 公式，因此降维过程只能一维一维逐次进行. Burrows方法的另一个优点是对被积函数的光滑性要求较低. 它特别实用于被积函数具有奇点或者是激烈振荡的情形.

Burrows方法的主要缺点是由于估计测度函数$\mu(y)$引出了另外的误差. 作为补救的办法是增加数据点的个数，以减少误差. 定理7—10保证了整个近似过程的收敛性. 但是其收敛速率由于依赖于被积函数的性质，尚需进一步研究. 在计算时，我们可以逐步增加数据点的个数，一直到前后两次所得近似值的差落在预先指定的精度范围之内，从而求得精度符合要求的估计值.

最后我们指出，借助于复测度，可以推广Burrows方法，用以估计形如

$$\int_C f(z)\,dz$$

的围道积分，其中$f(z)$是复变量z的函数，C是围道.

附 录 Ⅰ

多元直交多项式的公共零点作为结点的求积公式

在附录Ⅰ和附录Ⅱ中，我们使用了下面的记号：

记号说明Ⅰ

$$I_{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n}=\int_{R_n}\!\!\cdots\!\int w(x_1,x_2,\cdots,x_n)x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$V\equiv I_{0,0,\cdots,0}\equiv\int_{R_n}\!\!\cdots\!\int w(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

我们用下列形式的表

$$\begin{array}{cc}
(x_1,y_1) & A_1\\
(x_2,y_2) & A_2\\
\vdots & \vdots\\
(x_N,y_N) & A_N
\end{array}$$

表示求积公式

$$\int_{R_n}\!\!\cdots\!\int w(x_1,x_2,\cdots,x_n)f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

$$\cong\sum_{i=1}^{N}A_i f(x_{1,i},x_{2,i},\cdots x_{n,i})$$

$(x_1,x_2,\cdots,x_n)_{FS}$表示由点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$及它的全体对称点（即交换坐标分量并添加正负号后所得的一切异于它的点）构成的点组.

记号说明Ⅱ：区域

1. C_n——n维方体域：

$$-1\leqslant x_i\leqslant 1\qquad i=1,2,\cdots,n$$

C_n的顶点是$(\pm1,\ \pm1,\ \cdots,\ \pm1)$；$C_2$是正方形，$C_3$是立方体，

$V=2^n$.

2. S_n——n维球域：

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1$$

S_2是圆．当$w(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{a/2}$，$a>-n$时，

$$V=\frac{2}{n+2}\ \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

3. S_n^{shell}——n 维球壳：

$$\rho\leqslant x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1$$

$$0<\rho<1$$

当$w(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$时

$$V=\frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}(1-\rho^n)$$

4. U_n——n 维球面：

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$$

U_2是单位圆周．当$w(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1$时

$$V=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

5. G_n——n维八面体：

$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\leqslant 1$$

G_2是正方形；G_3是正八面体．$V=2^n/n!$

6. T_n——n维单纯形：

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1\quad x_i\geqslant 0\quad i=1,2,\cdots,n$$

T_2是三角形；T_3是四面体；T_n有$n+1$个顶点：

$$(0,0,\cdots,0)$$

$$(1,0,\cdots,0)$$

$$\vdots$$

$$(0,0,\cdots,1)$$

$$V=\frac{1}{n!}$$

7. $E_n^{r^2}$——带权函数$\exp(-x_1^2-\cdots-x_n^2)$的整个$n$维空间：

$$-\infty<x_i<\infty \quad i=1,2,\cdots,n$$

$$w(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\exp(-x_1^2-\cdots-x_n^2)$$

$$V=\pi^{n/2}$$

8. E_n^r——带权函数 $\exp(-\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2})$ 的整个n维空间：

$$-\infty<x_i<\infty \quad i=1,2,\cdots,n$$

$$w(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\exp(-\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2})$$

$$V=\frac{2(n-1)!\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

9. H_2——2维正六边形区域：它的六个顶点是$(\pm1,0)$，$\left(\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$，$V=\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

10. El_p——带权函数$[(x-c)^2+y^2]^{-1/2}[(x+c)^2+y^2]^{-1/2}$的二维椭圆域：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad a^2-b^2=c^2$$

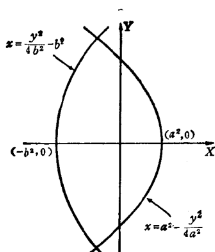
$$w(x,y)=[(x-c)^2+y^2]^{-1/2}[(x+c)^2+y^2]^{-1/2}$$

$$V=2\pi\log_e\left(\frac{a+b}{c}\right)$$

11. P_{ar}——抛物区域：该区域为由下列二抛物线

$$x=a^2-\frac{y^2}{4a^2} \qquad x=\frac{y^2}{4b^2}-b^2$$

围成的区域(见下图)．$w(x,y)=1$．$V=\frac{8}{3}ab(a^2+b^2)$.



1. C_2：7 点 5 次

Radon【1】，Albrecht 和 Collatz【2】

$(\pm r, \pm s) \qquad \frac{5}{36}V$

$(0, \pm t) \qquad \frac{5}{63}V$

$(0,0) \qquad \frac{2}{7}V$

$$r=\sqrt{\frac{3}{5}} \qquad s=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad t=\sqrt{\frac{14}{15}}$$

求积结点是下列直交多项式的公共零点：

$$P_{3,1}=x^3-\frac{3}{5}x \qquad P_{3,2}=xy^2-\frac{1}{3}x$$

$$P_{3,3}=x^2y+y^3-\frac{14}{15}y$$

2. C_2： 8 点 5 次

Burnside【3】

$(r,0)_{FS}$ $\quad \frac{10}{49}V$

$(\pm s, \pm s)$ $\quad \frac{9}{196}V$

$r=\sqrt{\frac{7}{15}}$ $\quad s=\sqrt{\frac{7}{9}}$

求积结点是下列直交多项式的公共零点：

$$P_{3,1}=x^3-\frac{2}{5}xy^2-\frac{7}{15}x \qquad P_{3,2}=y^3-\frac{2}{5}x^2y-\frac{5}{17}y$$

$$P_{4,1}=x^2y^2-\frac{5}{9}x^2-\frac{5}{9}y^2+\frac{7}{27}$$

3\. C_2: 9点5次

乘积型Gauss公式

$(0,0)$ $\quad \frac{16}{81}V$

$(r,0)_{FS}$ $\quad \frac{10}{81}V$

$(\pm r, \pm r)$ $\quad \frac{25}{324}V$

$r=\sqrt{\frac{3}{5}}$

求积结点是下列直交多项式的公共零点：

$$P_{3,1}=x^3-\frac{3}{5}x \qquad P_{3,2}=y^3-\frac{3}{5}y$$

4\. C_2: 13点5次

Tyler【4】

$(0,0)$ $\quad -\frac{28}{45}V$

$(\pm 1, \pm 1)$ $\frac{1}{36}V$

$(1, 0)_{FS}$ $\frac{1}{45}V$

$\left(\frac{1}{2}, 0\right)_{FS}$ $\frac{16}{45}V$

求积结点是下列直交多项式的公共零点：

$$P_{4,1}=x^3y-xy \qquad P_{4,2}=xy^3-xy$$

5. C_2：12 点 7 次

Tyler【4】

$(r, 0)_{FS}$ B_1

$(\pm s, \pm s)$ B_2

$(\pm t, \pm t)$ B_3

$$r^2=\frac{6}{7} \qquad s^2=\frac{114-3\sqrt{583}}{287} \qquad t^2=\frac{114+3\sqrt{583}}{287}$$

$$B_1=\frac{49}{810}V \qquad B_2=\frac{178981+2769\sqrt{583}}{1888920}V$$

$$B_3=\frac{178981-2769\sqrt{583}}{1888920}V$$

全部求积结点在C_2的内部且全体求积系数是真的．求积结点是下列直交多项式的公共零点：

$$P_{4,1}=x^3y-xy^3 \qquad P_{4,2}=x^4-y^4-\frac{6}{7}x^2+\frac{6}{7}y^2$$

$$P_{4,3}=x^4+\frac{54}{55}x^2y^2+y^4-\frac{456}{385}x^2-\frac{456}{385}y^2+\frac{108}{385}$$

6. C_2：12点 7 次

Mysovskih【5】，Phillips【6】

$(r, 0)_{FS}$ B_1

$(s, 0)_{FS}$ B_2

$(\pm t, \pm t)$ B_3

$$r^2=\frac{105+3\sqrt{385}}{140} \qquad s^2=\frac{105-3\sqrt{385}}{140}$$

$$t^2=\frac{3}{5} \qquad B_1=\frac{77-3\sqrt{385}}{891}V$$

$$B_2=\frac{77+3\sqrt{385}}{891}V \qquad B_3=\frac{25}{324}V$$

4 个结点 $(r,0)_{FS}$ 在 C_2 的外边. 求积结点是下列直交多项式的公共零点:

$$P_{4,1}=x^3y-\frac{3}{5}xy \qquad P_{4,2}=xy^3-\frac{3}{5}xy$$

$$P_{4,3}=x^4+\frac{27}{14}x^2y^2+y^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2+\frac{27}{70}$$

7. C_2: 13点 7 次

Maxwell[7]

$(0, 0)$	$\frac{1}{81}V$
$(r, 0)_{FS}$	$\frac{49}{324}V$
$(s, t)_{FS}$	$\frac{31}{649}V$

$$r^2=\frac{12}{35} \qquad s^2=\frac{93+3\sqrt{186}}{155} \qquad t^2=\frac{93-3\sqrt{186}}{155}$$

全部求积结点在C_2内部, 它们是下列直交多项式的公共零点:

$$P_{4,1}=x^3y+xy^3-\frac{6}{5}xy$$

$$P_{4,2}=x^4-\frac{54}{35}x^2y^2+y^4-\frac{12}{35}x^2-\frac{12}{35}y^2$$

8. C_2：16点7次

乘积型 Gauss 公式

$(\pm r, \pm r)$	B_1
$(\pm s, \pm s)$	B_2
$(r, s)_{FS}$	B_3

$$r^2=\frac{15-2\sqrt{30}}{35} \qquad s^2=\frac{15+2\sqrt{30}}{35}$$

$$B_1=\frac{59+6\sqrt{30}}{864}V \qquad B_2=\frac{59-6\sqrt{30}}{864}V$$

$$B_3=\frac{49}{864}V$$

9. C_3：14点5次

Hammer 和 Stroud[8]

$(r, 0, 0)_{FS}$	B_1
$(\pm s, \pm s, \pm s)$	B_2

$$r^2=\frac{19}{30} \qquad s^2=\frac{19}{33} \qquad B_1=\frac{40}{361}V \qquad B_2=\frac{121}{2888}V$$

求积结点是下列直交多项式的公共零点：

$P_{3,1}=x^2z-y^2z$ $\qquad P_{3,2}=x^2y-yz^2$

$P_{3,3}=xy^2-xz^2$ $\qquad P_{3,4}=30x^3+3xy^2-19x$

$P_{3,5}=30y^3+3yz^2-19y$ $\qquad P_{3,6}=30z^3+3xz^2-19z$

10. S_3：13点5次

$$w(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{\alpha/2} \quad \alpha>-3$$

Ditkin[9]，对于$\alpha=0$

$(0, 0, 0)$	B_0

$$(\pm r, \pm s, 0) \qquad B_1$$
$$(0, \pm r, \pm s) \qquad B_1$$
$$(\pm s, 0, \pm r) \qquad B_1$$
$$r^2 = \frac{(a+5)(5+\sqrt{5})}{10(a+7)} \qquad s^2 = \frac{(a+5)(5-\sqrt{5})}{10(a+7)}$$
$$B_0 = \frac{4}{(a+5)^2}V \qquad B_1 = \frac{(a+3)(a+7)}{12(a+5)^2}V$$

与系数 B_1 对应的 12 个求积结点是正二十面体的顶点. 对于 $a=0$, 求积结点是下列直交多项式的公共零点:

$$P_{3,1}(x, y, z) = x^3 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}xz^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{14}x$$
$$P_{3,2}(x,y,z) = P_{3,1}(z,x,y)$$
$$P_{3,3}(x, y, z) = y^3 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}yz^2 - \frac{5-\sqrt{5}}{14}y$$
$$P_{3,4}(x,y,z) = P_{3,3}(y,z,x)$$
$$P_{3,5}(x, y, z) = x^2y + \frac{3+\sqrt{5}}{2}yz^2 - \frac{5+\sqrt{5}}{14}y$$
$$P_{3,6}(x,y,z) = P_{3,5}(z,x,y)$$
$$P_{3,7}(x,y,z) = xyz$$

11. T_2: 7 点 5 次

Radon[1], Hammer, Marlowe, 和 Stroud [10]

$$(t, t; t) \qquad A$$
$$(r, r; s) \qquad B$$
$$(u, u; v) \qquad C$$
$$t = \frac{1}{3} \qquad A = \frac{9}{40}V$$
$$r = \frac{6-\sqrt{15}}{21} \qquad s = \frac{9+2\sqrt{15}}{21} \qquad B = \frac{155-\sqrt{15}}{1200}V$$

$$u=\frac{6+\sqrt{15}}{21} \qquad v=\frac{9-2\sqrt{15}}{21} \qquad C=\frac{155+\sqrt{15}}{1200}V$$

求积结点是下列直交多项式的公共零点：

$$P_{3,1}=x^2y+xy^2+y^3-\frac{1}{7}x^2-\frac{8}{7}xy-\frac{10}{7}y^2+\frac{1}{7}x+\frac{4}{7}y-\frac{1}{21}$$

$$P_{3,2}=x^3-2x^2y+2xy^2-y^3-x^2+y^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y$$

$$P_{3,3}(x,y)=P_{3,1}(y,x)$$

附 录 Ⅱ

最少点数求积公式表

1. C_2： 7 点 5 次

   见附录Ⅰ公式1

2*. C_2： 12点 7 次

   见附录Ⅰ公式 5

3*. C_2： 12点 7 次

   见附录Ⅰ公式 6

4*. C_3： 27点 7 次

   Maxwell[7], Hammer和Stroud[8], Phillips[6]

$(0,0,0)$	B_0
$(r,0,0)_{FS}$	B_1
$(s,s,0)_{FS}$	B_2
$(\pm t,\pm t,\pm t)$	B_3

$$r^2=\frac{33\mp\sqrt{165}}{28}\qquad s^2=\frac{30\pm\sqrt{165}}{35}$$

$$t^2=\frac{195\mp4\sqrt{165}}{337}\qquad B_1=\frac{22}{945r^6}V$$

$$B_2=\frac{1}{135s^6}V\qquad B_3=\frac{1}{216t^6}V$$

$$B_0=V-6B_1-12B_2-8B_3$$

注意在上述两个求积公式中都有一些求积结点在 C_3 的外边.

5. S_2： 6 点 4 次

$$w(x,y)=(x^2+y^2)^{a/2} \quad a>-2$$

Mysovskih【5】，对于$a=0$.

$(0,0)$	B_0
(r_i,s_i)	B_1
$i=0,1,2,3,4$	

$$r_i=\sqrt{\frac{a+4}{a+6}}\cos\frac{2i\pi}{5} \qquad s_i=\sqrt{\frac{a+4}{a+6}}\sin\frac{2i\pi}{5}$$

$$B_0=\frac{4}{(a+4)^2}V \qquad B_1=\frac{(a+2)(a+6)}{5(a+4)^2}V$$

在上面的求积公式中有5个结点是正五边形的顶点.

6. S_2: 7点5次

$$w(x,y)=(x^2+y^2)^{a/2} \quad a>-2$$

Radon【1】, Peirce【11】，对于$a=0$.

$(0,0)$	A
$(\pm r,0)$	B
$(\pm s,t)$	B

$$r^2=\frac{a+4}{a+6} \qquad s^2=\frac{a+4}{4(a+6)} \qquad t^2=\frac{3(a+4)}{4(a+6)}$$

$$A=\frac{4}{(a+4)^2}V \qquad B=\frac{(a+2)(a+6)}{6(a+4)^2}V$$

与系数B对应的六个求积结点是正六边形的顶点.

7*. S_2: 12点7次

Peirce【11】, Hammer 和 Stroud【8】

$(r,0)_{FS}$	B_1
$(\pm s,\pm s)$	B_2
$(\pm t,\pm t)$	B_3

$$r^2=\frac{3}{4} \qquad s^2=\frac{27-3\sqrt{29}}{104}$$

$$t^2=\frac{27+3\sqrt{29}}{104} \qquad B_1=\frac{2}{27}V$$

$$B_2=\frac{551+4\sqrt{29}}{6264}V \qquad B_3=\frac{551-41\sqrt{29}}{6264}V$$

全体求积结点是S_3的内点，全体求积系数是正的.

8*. S_3：13点5次

见附录 I 公式10

9*. S_3：27点7次

Hammer 和 Stroud [8]

$(0,0,0)$	B_0
$(r,0,0)_{FS}$	B_1
$(s,s,0)_{FS}$	B_2
$(\pm t,\pm t,\pm t)$	B_3

$$r^2=\frac{45\mp\sqrt{30}}{57} \qquad s^2=\frac{18\pm\sqrt{30}}{42}$$

$$t^2=\frac{27\mp2\sqrt{30}}{87} \qquad B_1=\frac{1}{63r^6}V$$

$$B_2=\frac{1}{630s^6}V \qquad B_3=\frac{1}{2520t^6}V$$

$$B_0=V-6B_1-12B_2-8B_3$$

在上面的二个求积公式中都有一些求积结点在S_3外部.

10. U_2：$(m+1)$点 m 次

Krylov[12，73—74页]

(r_k,s_k) $\qquad B$

$k=0,1,\cdots,m$

$$r_k=\cos\frac{2k\pi}{m+1} \qquad s_k=\sin\frac{2k\pi}{m+1}$$

$$B=\frac{2\pi}{m+1}$$

11. T_2: 7 点 5 次

见第一章§6

12. $E_2^{r^2}$: 6 点 4 次

$(0,0)$ A

(r_i,s_i) B

$i=0,1,2,3,4$

$$r_i=\sqrt{2}\cos\frac{2i\pi}{5} \qquad s_i=\sqrt{2}\sin\frac{2i\pi}{5}$$

$$A=\frac{1}{2}V \qquad B=\frac{1}{10}V$$

五个点(r_i,s_i)是正五边形的顶点.

13*. $E_3^{r^2}$: 27点 7 次

Stroud 和 Secrest【13】

$(0,0,0)$ A

$(r,0,0)_{FS}$ B

$(s,s,0)_{FS}$ C

$(\pm t,\pm t,\pm t)$ D

$$r^2=\frac{15\pm\sqrt{15}}{4} \qquad s^2=\frac{6\mp\sqrt{15}}{2}$$

$$t^2=\frac{9\pm2\sqrt{15}}{2} \qquad A=\frac{720\pm8\sqrt{15}}{2205}V$$

$$B=\frac{270\mp46\sqrt{15}}{15435}V \qquad C=\frac{162\pm41\sqrt{15}}{6174}V$$

$$D=\frac{783\mp202\sqrt{15}}{24696}V$$

两个求积公式的系数都是正的.

14*. $E_3^{r^2}$：13点 5 次

Stroud 和 Secrest【13】

$(0,0,0)$	A
$(\pm r, \pm s, 0)$	B
$(0, \pm r, \pm s)$	B
$(\pm s, 0, \pm r)$	B

$$r^2=\frac{5+\sqrt{5}}{4} \qquad s^2=\frac{5-\sqrt{5}}{4}$$

$$A=\frac{2}{5}V \qquad B=\frac{1}{20}V$$

与求积系数B对应的12个求积结点是正二十面体的顶点.

15*. $E_2^{r^2}$：12点 7 次

Stroud 和 Secrest【13】

$(r,0)_{FS}$	A
$(\pm s, \pm s)$	B
$(\pm t, \pm t)$	C

$$r^2=3 \qquad s^2=\frac{9-3\sqrt{5}}{8}$$

$$t^2=\frac{9+3\sqrt{5}}{8} \qquad A=\frac{1}{36}V$$

$$B=\frac{5+2\sqrt{5}}{45}V \qquad C=\frac{5-2\sqrt{5}}{45}V$$

16. E_2^r：6 点 4 次

$(0,0)$	A
(r_i, s_i)	B

$i=0,1,2,3,4$

$$r_i=2\sqrt{5}\cos\frac{2i\pi}{5} \qquad s_i=2\sqrt{5}\sin\frac{2i\pi}{5}$$

$$A=\frac{7}{10}V \qquad B=\frac{3}{50}V$$

5 个点(r_i,s_i)是正五边形的顶点.

17. E_2^r: 7 点 5 次

Stroud 和 Secrest【13】

$(0,0)$	A
$(\pm r,0)$	B
$(\pm s,\pm t)$	B

$$r=2\sqrt{5} \qquad s=\sqrt{5}$$

$$t=\sqrt{15} \qquad A=\frac{7}{10}V$$

$$B=\frac{1}{20}V$$

18*. E_3^r: 27点 7 次

Stroud 和 Secrest【13】

$(0,0,0)$	A
$(r,0,0)_{FS}$	B
$(s,s,0)_{FS}$	C
$(\pm t,\pm t,\pm t)$	D

$$r^2=\frac{720-24\sqrt{130}}{11} \qquad s^2=288+24\sqrt{130}$$

$$t^2=\frac{-216+24\sqrt{130}}{7} \qquad A=\frac{5175-13\sqrt{130}}{8820}V$$

$$B=\frac{3870+283\sqrt{130}}{493920}V \qquad C=\frac{3204-281\sqrt{301}}{197568}V$$

$$D=\frac{4239+373\sqrt{130}}{917568}$$

19*. E_3^r: 13点5次

Stroud 和 Secrest[13]

$(0,0,0)$	A
$(\pm r, \pm s, 0)$	B
$(0, \pm r, \pm s)$	B
$(\pm s, 0, \pm r)$	B

$r^2=15+3\sqrt{5}$ $\qquad s^2=15-3\sqrt{5}$

$A=\frac{3}{5}V$ $\qquad B=\frac{1}{30}V$

与求积系数B对应的12个求积结点是正二十面体的顶点.

20*. E_2^r: 12点7次

Stroud 和 Secrest[13]

$(r,0)_{FS}$	A
$(\pm s, \pm s)$	B
$(\pm t, \pm t)$	C

$r^2=42$ $\qquad s^2, t^2=\frac{6615\pm 21\sqrt{74255}}{454}$

$A=\frac{5}{588}V$ $\qquad B, C=\frac{5272105\mp 18733\sqrt{74255}}{43661940}V$

21. H_2: 4点3次

$(r,0)_{FS}$ $\qquad \frac{1}{4}V$

$$r^2=\frac{2}{15}$$

22. H_2: 7点5次

Lyusternik[14], Albrecht 和 Collatz[2]

$(0,0)$	A
$(\pm r, 0)$	B
$(\pm s, \pm t)$	B

$$r^2=\frac{14}{25} \qquad s^2=\frac{14}{100}$$

$$t^2=\frac{42}{100} \qquad A=\frac{258}{1008}V$$

$$B=\frac{125}{1008}V$$

23. EI_p: 4 点 3 次

$$w(x,y)=[(x-c)^2+y^2]^{-1/2}[(x+c)^2+y^2]^{-1/2}$$

Lee 和 Stroud[15]

$(\pm r, 0)$	B
$(0, \pm s)$	B

$$r^2=\left(ab+\frac{1}{2\pi}c^2V\right)\frac{\pi}{V} \qquad s^2=\left(ab-\frac{1}{2\pi}c^2V\right)\frac{\pi}{V}$$

$$B=\frac{1}{4}V$$

24. EI_p: 4 点 3 次

$$w(x,y)=[(x-c)^2+y^2]^{-1/2}[(x+c)^2+y]^{-1/2}$$

Lee 和 Stroud[15]

$(\pm r, \pm s)$	$\frac{1}{4}V$

$$r^2=\left(ab+\frac{1}{2\pi}c^2V\right)\frac{\pi}{2V} \qquad s^2=\left(ab-\frac{1}{2\pi}c^2V\right)\frac{\pi}{2V}$$

25. EI_p: 7 点 5 次

Lee 和 Stroud[15]

$(0,0)$ A

$(\pm r, 0)$ B

$(\pm s, \pm t)$ C

$$r^2=\frac{I_{40}I_{04}-I_{22}^2}{I_{20}I_{04}-I_{02}I_{22}} \qquad s^2=\frac{I_{22}}{I_{02}}$$

$$t^2=\frac{I_{04}}{I_{02}} \qquad B=\frac{(I_{20}I_{04}-I_{02}I_{22})^2}{2I_{04}(I_{40}I_{04}-I_{22}^2)}$$

$$C=\frac{I_{02}^2}{4I_{04}} \qquad A=V-2B-4C$$

26*. EI_p: 12点 7 次

$$w(x,y)=[(x-c)+y^2]^{-1/2}[(x+c)^2+y^2]^{-1/2}$$

Lee 和 Stroud【15】

$(\pm r_i, 0)$ A_i

$(0, \pm s_j)$ B_j

$(\pm u, \pm v)$ C

$$i,j=1,2$$

$$u^2=\frac{I_{42}}{I_{22}} \qquad v^2=\frac{I_{24}}{I_{22}}$$

$$C=\frac{I_{22}^3}{4I_{42}I_{24}}$$

r_1^2, r_2^2 是 $r^4+a_1r^2+a_0=0$ 的根，其中

$$a_0=\frac{(I_{20}-4C_u^2)(I_{60}-4C_u^6)-(I_{40}-4C_u^4)^2}{D_1}$$

$$a_1=\frac{(I_{20}-4C_u^2)(I_{40}-4C_u^4)-k_1(I_{60}-4C_u^6)}{D_1}$$

$$D_1=k_1(I_{40}-4C_u^4)-(I_{20}-4C_u^2)^2$$

$$A_1=\frac{I_{20}-4C_u^2-k_1r_2^2}{2(r_1^2-r_2^2)}$$

$$A_2=\frac{I_{20}-4C_u^2-k_1r_2^2}{2(r_2^2-r_1^2)}$$

$$k_1=\frac{2(V-4C)}{3}$$

s_1^2, s_2^2 是 $s^4+b_1s^2+b_0=0$ 的根，其中

$$b_0=\frac{(I_{02}-4C_v^2)(I_{06}-4C_v^6)-(I_{04}-4C_v^4)^2}{D_2}$$

$$b_1=\frac{(I_{02}-4C_v^2)(I_{04}-4C_v^4)-k_2(I_{06}-4C_v^6)}{D_2}$$

$$D_2=k_2(I_{04}-4Cv^4)-(I_{02}-4Cv^2)^2$$

$$B_1=\frac{I_{02}-4C_v^2-k_2s_2^2}{2(s_1^2-s_2^2)}$$

$$B_2=\frac{I_{02}-4C_v^2-k_2s_1^2}{2(s_2^2-s_1^2)}$$

$$k_2=\frac{V-4C}{3}$$

27. P_{ar}: 4 点 3 次

$w(x,y)=1$ 或 $w(x,y)=[4(x^2+y^2)^{1/2}]^{-1}$

$(r_1, \pm s)$	A
$(r_2, \pm t)$	B

r_1, r_2 是方程 $r^2+cr+d=0$ 的根，其中

$$c=\frac{I_{20}I_{10}-I_{30}I_{00}}{I_{20}I_{00}-I_{10}^2} \qquad d=\frac{I_{30}I_{10}-I_{20}^2}{I_{20}I_{00}-I_{10}^2}$$

$$A=\frac{r_2I_{00}-I_{10}}{2(r_2-r_1)} \qquad B=\frac{I_{10}-r_1I_{00}}{2(r_2-r_1)}$$

$$s^2=\frac{r_2I_{02}-I_{12}}{2A(r_2-r_1)} \qquad t^2=\frac{I_{12}-r_1I_{02}}{2B(r_2-r_1)}$$

$$A=\frac{5}{588}V \qquad B,C=\frac{5272105\mp18733\sqrt{74255}}{43661940}V$$

28*. G_3: 13点 5 次

$(0,0,0)$	B_0
$(\pm r, \pm s, 0)$	B_1
$(0, \pm r, \pm s)$	B_1
$(\pm s, 0, \pm r)$	B_1

$$r^2=\frac{4+2\sqrt{2}}{21} \qquad s^2=\frac{4-2\sqrt{2}}{21}$$

$$B_0=\frac{68}{320}V \qquad B_1=\frac{21}{320}V$$

29. C_n: $2n$点 3 次

Stroud【16】

$$(r_{i,1},\ r_{i,2},\ \cdots,\ r_{i,n-1},\ r_{i,n}) \qquad \frac{1}{2n}V$$

$$r_{i,2k-1}=\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\frac{(2k-1)i\pi}{n} \qquad r_{i,2k}=\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\frac{(2k-1)i\pi}{n}$$

$$k=1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right] \qquad i=1,2,\cdots,2n$$

若n是奇数$r_{i,n}=\frac{(-1)^i}{\sqrt{3}}$. 求积结点是$n$维正八面体的顶点，均在$C_n$内.

30. C_n: $2n$点 3 次

$$(r,0,0,\cdots,0,0)_{FS} \qquad \frac{1}{2n}V$$

$$r=\sqrt{\frac{n}{3}}$$

当$n>3$时，全体求积结点在C_n的外边.

31. C_n: $(n+1)$点 2 次

Stroud[16]

$(r_{i,1},\ r_{i,2},\ \cdots,\ r_{i,n-1},\ r_{i,n})$　　$\frac{1}{n+1}V$

$r_{i,2k-1}=\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\frac{2ik\pi}{n+1}$　　$r_{i,2k}=\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\frac{2ik\pi}{n+1}$

$k=1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]$　　$i=0,1,\cdots,n$

若n是奇数

$$r_{i,n}=\frac{(-1)^i}{\sqrt{3}}$$

32. S_n: $(n+1)$点 2 次

Stroud[16]

$(r_{i,1},\ r_{i,2},\ \cdots,\ r_{i,n-1},\ r_{i,n})$　　$\frac{1}{n+1}V$

$r_{i,2k-1}=\sqrt{\frac{2}{n+2}}\cos\frac{2ik\pi}{n+1}$　　$r_{i,2k}=\sqrt{\frac{2}{n+2}}\sin\frac{2ik\pi}{n+1}$

$k=1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]$　　$i=0,1,\cdots,n$

若n是奇数

$$r_{i,n}=\frac{(-1)^i}{\sqrt{n+2}}$$

求积结点是n维正单纯形的顶点，且均在S_n内.

33. S_n: $2n$点 3 次

$w(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{\alpha/2}$　$\alpha>-n$

Hammer 和 Stroud[8]　对于$\alpha=0$

$(r,0,0,\cdots,0)_{FS}$　　$\frac{1}{2n}V$

$r^2=\frac{n+\alpha}{n+\alpha+2}$

34. S_n^{shell}: $2n$点 3 次

Mustard【17】

$(r,0,0,\cdots,0)_{FS}$ $\qquad B$

$$r^2=\frac{n}{n+2}\left(\frac{1-\rho^{n+2}}{1-\rho^n}\right)\qquad B=\frac{1}{2n}V$$

全体结点在S_n^{shell}内

35. U_n: $2n$点 3 次

$(1,0,0,\cdots,0)_{FS}$ $\qquad \frac{1}{2n}V$

求积结点是n维正八面体的顶点.

36. G_n: $(n+1)$点 2 次

Stroud【16】

$(r_{i,1},\ r_{i,2},\ r_{i,n-1},\ r_{i,n})$ $\qquad \frac{1}{n+1}V$

$$r_{i,2k-1}=\sqrt{\frac{4}{(n+1)(n+2)}}\cos\frac{2ik\pi}{n+1}$$

$$r_{i,2k}=\sqrt{\frac{4}{(n+1)(n+2)}}\sin\frac{2ik\pi}{n+1}$$

$k=1,2,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right]$ $\qquad i=0,1,\cdots,n$

若n是奇数

$$r_{i,n}=(-1)^i\sqrt{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}$$

求积结点是n维正单纯形的顶点.

37. C_n: $2n$点 3 次

Stroud【16】

$(r,0,0,\cdots 0)_{FS}$ $\qquad \frac{1}{2n}V$

$$r^2=\frac{2n}{(n+1)(n+2)}$$

38. T_n: $(n+1)$点2次

Hammer 和 Stroud[8]

$(r,r,\cdots,r;\ s)$ $\qquad\qquad \frac{1}{n+1}V$

$$r=\frac{n+2\mp\sqrt{n+2}}{(n+1)(n+2)} \qquad s=\frac{n+2\pm n\sqrt{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

当选择上面的符号时，得到的求积公式的结点全部是T_n的内点(对全体n)；当选择下面的符号时，对于$n\geqslant 3$，全部求积结点都在T_n外.

39. T_n: $(n+2)$点3次

Hammer 和 Stroud[8]

$(r,r,\cdots,r;\ r)$ $\qquad\qquad B$

$(s,s,\cdots,s;\ t)$ $\qquad\qquad C$

$$r=\frac{1}{n+1} \qquad s=\frac{1}{n+3}$$

$$t=\frac{3}{n+3} \qquad B=-\frac{(n+1)^2}{4(n+2)}V$$

$$C=\frac{(n+3)^2}{4(n+1)(n+2)}V$$

40. $E_n^{r^2}$: $2n$点3次

Stroud 和 Secrest[13]

$(r,0,0,\cdots,0)_{FS}$ $\qquad\qquad \frac{1}{2n}V$

$$r^2=\frac{n}{2}$$

41. E_n^r: $2n$点 3 次

Stroud 和Secrest【13】

$(r,0,0,\cdots,0)_{FS}$ $\qquad \frac{1}{2n}V$

$$r^2=n(n+1)$$

附录 I 和 II 的参考文献

(1) J. Padon, Monatsh. Math., V.52, 1948, pp.286—300. MR 11, 405.

(2) J. Albrecht and L. Collatz, Z. Angew Math. Mech., V.38, 1958, pp.1—15. MR 20#432.

(3) W. Burnside, Messenger of Math., V.37, 1908, pp.166—167.

(4) G.W.Tyler, Canad. J. Math. V.5, 1953, pp.393—412. MR 15,67.

(5) Mysovskih,I.P., Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz., V.4, 1964, pp.3—14. MR 28#3547.

(6) G. M. Phillips, Computer J., V.10, 1967, pp.202. MR35#5137.

(7) J.Clerk Maxwell, Proc. Cambridge Philos. Soc., V.3, 1877, pp.39—47.

(8) P.C.Hammer and A.H.Stroud, Math. Tables Aids Comput., V.12, 1958, pp.272—280.

(9) V.A.Ditkin, Dokl. Akad. Nauk SSSR, V.62, 1948, pp.445—447. MR 10,331.

(10) P.C.Hammer, O.J.Marlowe and A.H. Stroud, Math. Tables Aids Comput., V.10, 1956,

pp. 130—137. MR 19, 177.

(11) W.H.Peirce, Ph.D. thesis, Univ. of Wisconsin, Madison 1956.

(12) V.I. Krylov, Approximate Calculation of Integrals, Macmillan, New York, 1962. (Trans. from 1st Russin ed., 1959, by A.H. Stroud).

(13) A.H. Stroud and D. Secrest, Math. Comput., V.17, 1963, pp. 105—135. MR 28#4677.

(14) L.A. Lyusternik, Dokl. akad. Nauk SSSR, V.62, 1948, pp. 449—452. MR 10, 330.

(15) M. Lee and A.H. Stroud, Math. Comput., V.15, 1961, pp. 48—51. MR 22#10183.

(16) A.H. Stroud, Math. Tables Aids Comput., V.11, 1957, pp. 257—261. MR 20, 71.

(17) D. Mustard, Math. Comput., V.18, 1964, pp. 578—589, MR 30#712.

参 考 文 献

【1】 徐利治，周蕴时，高维数值积分，科学出版社，1980.

【2】 徐利治，王仁宏，周蕴时，关于边界型求积公式的构造方法及应用，计算数学，3(1978)，54—75.

【3】 梁学章，关于某些高维区域上的最小零偏差多项式，计算数学，2(1979)，p.189—193.

【4】 徐利治，Формула разложения для приближенного вычисления двойных интегралов，Сообщения Акад. Наук. ГССР, 5(1962)，521—524.

【5】 徐利治(Hsu, L.C.), A few expansion formulas for the approximate integration over plane regions, Acad. Math. Acad. Sci. Hung., 13(1962), 387—392.

【6】 徐利治(Hsu, L.C.), On a method for constructing a type of numerical cubature formulas, Rev. Math. Pures. Appl., 7(1962), 109—117.

【7】 徐利治(Hsu, L.C.), On a method for expanding multiple integrals in terms of integrals in lower dimensions, Acta. Math. Acad. Sci. Hung., 14(1963), 359—367.

【8】 Burrows, B.L., A new approach to numerical integration, J. Inst. Maths Applics, 26(1980), 151—173.

【9】 Cheney, E.W. and Southard, T.H., A survey of methods for rational approximation, etc., SIAM Review, 5(1963), 219—231.

【10】 Christoffel, E. B., über die Gaussische Quadratur und eine Verallge-meinerungderselben, J. Reine. Angew. Math., V.55 (1858), 61—82.

【11】 Collatz, L., Functional Analysis and Numerical Mathematics, Academic Press, New York, 1966.

【12】 Davis, P.J. and Pollak, H., On the analytic continuation of mapping functions, Trans. Amer. Math Soc., 87(1958), 198—225.

【13】 Davis, P.J., Interpolation and Approximation, Blaisdell, New York, 1963.

【14】 Davis, P.J., Triangle formulas in the complex plane, Math. Comp., 18(1964), 569-577.

【15】 Davis. P.J. and Rabinowitz, P., Numerical Integration, New York, 1967.

【16】 Davis, P.J., Double integrals expressed as single integrals or inter-polatory functions, J.Appro.Theory, 5(1972), 276—307.

【17】 Deruyts, J., Sur le calcul approché de certaines integrales definies, Bull. de l' Acad. de Belgique, V.2(1886), 301—311.

【18】 Didonato, A.R. and Jarnagin, M.P., A method for computing the circular coverage function, Math. Comp., 16(1962), 347—355.

【19】 Epstein, B., Partial Differential Equations, Mc-Graw-Hill, New York, 1962.

【20】 Fedorenko, J.D., A formula for the approximate evaluation of double integrals (in Ukrainian), Dopovidi Akad.Nauk Ukrain. RSR, (1964), 1000—1005.

【21】 Franke, R., Minimal point cubatures of precision seven for symmetric planar regions, SIAM J. Numer. Anal. 10(1971), 849—862.

【22】 Gauss, C.F., Methodus nova integralium valores per approximationen inveniendi, Werke, V. 3(1866), 163—196.

【23】 Ghizzetti, A. and Ossicini, A., Quadrature formulae, Academic Press, New York, 1970.

【24】 Haegemans, A. and Robert, P., Constructtion of cubature formulas of degree eleven for symmetric planar regions, using orthogonal polynomials, Numer. Math., 25(1976), 139—148.

【25】 Hagemans, A. and Robert, P., Construction of cubature formulas of degree seven and nine symmetric planar regoins, using orthogonal polynomials, SIAM J. Numer. Anal., 14(1977), 492—508.

【26】 Haselgrove, C.B., A method for numerical integration, Math. Comp., 16(1962), 323—337.

【27】 Heine, E., Handbuch der Kugelfunctionen, V.1, (1878), Berlin.

【28】 Hermite, C., Sur la formule d′ interpolation de Legrange, J. Reine Angew Math., V.84(1878), 70—79.

【29】 Hummel, P.M. and Seebeck, C.L., A generalization of Taylor′s theorem, Amer. Math. Monthly, 56(1949), 243—247.

【30】 Ionescu, D. V., Cuadraturi Numerice, Academia Repulare Romine, Stiintasi Tehnica, 10, Bucharest, 1957.

【31】 Kratz, L.J., Replacing a double integral with a single integral, J. of Appro. Theory, 27(1979), 379—390.

【32】 Krylov, V.I., Approximate Calaulation of Integrals, Macmillan, New York, 1962(translated from the Russian).

【33】 Lobatto, R., Lessen over de Integraal-Rekening, The Hague, 1852.

【34】 Markoff, A., Sur la méthode de Gauss pour le ca-

lcul approché des integrales, Math. Ann., V.25(1885), 427—432.

【35】 Mclaren, A.D., Optimal numerical integration on a sphere, Math. Comp.

【36】 Mehler, F.G., Bemerkungen zur Theorie der mechanische Quadraturen, J.Reine Angew. Math., V.63 (1864), 152—157.

【37】 Mikhlin, S.G., Variatonal Methods in Mathematical Physics, New York, Pergamon, 1964.

【38】 Mysovskikh, I.P.Zh., Yychisl, Mat.I.Mat.Fiz., 4(1964), 3—14.

【39】 Obreschkoff, N., Neue Quadraturformeln, Abhandl. d. preuss. Akad. d. Wiss., Math. Natur wiss. Kl., No.4(1940), 1—20.

【40】 Obrechkoff, N., Sur les Moyennes Arithmétiques de la Série de Taylor C. R. Acad. Sci. Paris, 210 (1940), 526—528.

【41】 Posse, K.A., Sur les quadratures, Nouv. Ann. de Math., (2)V, 14(1875), 49—62.

【42】 Radau, R., Étude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie, J.Math.Pures Appl., (3)V. 6(1880), 283—336.

【43】 Radon, J., Zur mechanischen Kubatur. Monatsh. Math., 52(1948), 286—300.

【44】 Reisz, F. and Nagy. B., Function Analysis, New York, 1956.

【45】 Hammer, P.C. and Wymore, A. W., Numerical evaluation of multiple integrals I, Math. Tables Aids Comput., 11(1957), 59—67.

【46】 Sadowsky, M., A formula for the approximate

computation of a triple integral, Amer. Math Monthly, 47(1940), 539—543.

【47】 Scrborough, J.B., Numerical Mathematical Analysis, Johns Hopkins Press, Baltimore, 1950.

【48】 Stancu, D.D., A genera lization of the Gauss-Christoffel quadrature formula, Studii Cercetari, Matematica, Iasi, V.8(1957), 1—18.

【49】 Stancu, D.D., On the interpolation formula of Hermite and some applications of it, Studii Cercetari, Matematica, Cluj, V.8(1957), 339—355.(Rumanian).

【50】 Stancu, D.D., Sur quelques formules générales de quadrature du type Gauss-Christoffel, Mathematica (Cluj), V.1(1959). 167—182.

【51】 Stancu, D.D. and Stroud, A.H., Quadrature formulas with simple Gaussian nodes and multiple fixed nodes, 17(1963), Math. Comp., 384—394.

【52】 Stieltjes, T.J., Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques, Ann. Sci. École Norm. Sup., (3) V.1(1884), 409—426.

【53】 Stroud, A.H., Remarks on the disposition of points in numerical integration formulas, Math. Tables Aids Comput., 11(1957), 257—261.

【54】 Stroud, A.H., Numerical integration formulas of degree two, Math. Comput., 14(1960), 21—26.

【55】 Stroud, A.H., A bibliography on approximate integration, Math. Comp., 15(1961), 52—80.

【56】 Stroud, A.H., Some fifth degree integration formulas for symmetric regions I, II, Math. Comput., 20(1966), 90—97., Numer. Math., 9(1967), 460—468.

【57】 Stroud, A. H., Some seventh degree integration formulas for symmetric regions, SIAM J. Numer.

Anal., 4(1967), 37—44.

【58】 Stroud, A. H., Integration formulas and orthogonal polynomials, SIAM J.Numer.Anal., 4(1967), 381—389; 7(1970), 271—276.

【59】 Stroud, A.H., A fifth degree integration formula for the n-simplex, SIAM J. Numer.Anal., 6(1969), 90—98.

【60】 Stroud, A. H., Approximate Calculation of Multiple Integrals, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971.

【61】 Szegö, G., Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., V.23(1959), 30.

【62】 Walsh, J.L., Interpolation and Approximation, American Math. Soc., Providence, R. I., 1956.

【63】 Wendroff, B., Theoretical Numerical Analysis, New York, Academic Press, 1966.

【64】 Диткин В.А. и Люстерник, Л.А., ОБ одном приеме практического гарамонического анализа на сфере, вычисг. матем. и вычисг. техн. сб., (1953), №. 1, 3—13.

【65】 Золотарёв Е. И., Приложение эллиптических функчий к вопросам о функчиях наименее и наиболее отклоняющихся от нуля, Полное собрание сочинений, №. 2, Изд. Акад. наук СССР. Л., 1932.

【66】 Люстерник Л. А. и Диткин В.А., Построение приближснных формул для вычисления кратных интегралов, ДАН СССР, 61(1948), 441—444.

【67】 Крылов Б. И., Приближенное вычисление интегралов, Москва, 1959.

【68】 Левин М., Об одном способе вычисления двойных интегралов, Уч зап Тартуск. ун-та, (1961), вып.

102, 338—341.

【69】 Левин М., О экстремальных задачах, свзанных с одной квадратурной формулой, Известия Акад. Наук Зстонской СССР, 12(1963), №.1, 44—56.

【70】 Микеладзе Ш. Е., 数学分析的数值方法(董勤谟,方侃译), 科学出版社, 1957.

【71】 Микеладзе Ш. Е., Новые квадратурные формулы etc., ДАН СССР, 61(1948), №.4, 613—615.

【72】 Соболев С.Л., О формулах Механических кубатур на поверхности сферы, Сибирский матем. ж., 3(1962), №.5, 769—796.

【73】 Хованский, А.Н., 连分式及其推广在近似分析问题上的应用(叶乃膺译), 科学出版社, 1962.

【74】 Люстерник Л.А.и Соболев В.И., 泛函分析概要(杨从仁译), 科学出版社, 1955.

【75】 Солодов Б.М., О погрешности численного интегрирования, ДАН СССР, 148(1963), 284—287.

补 充 文 献

【76】 T. Botts, Convex sets, Amer. Math. Monthly, V.49, 1942, pp.527—535.

【77】 P. J. Davis, A construction of nonegative approximate quadrature, Math. Comput. V.21, 1967, pp.578—582.

【78】 F. N. Fritsch, On the existence of regions with minimal third degree integration formulas, Math. Comput. (to appear).

【79】 P. Appell, J. Kampé de Fériet, Fonctions Hypergeométriques et Hyperspheriques-Polynomes d' Hermite, GauthierVillars, Paris, 1926.

【80】 E. H., Jr. Goit, Third Degree Integration Formulas

with Four Points in Two Dimensions, M.S. thesis, State Univ. of New York at Buffalo, 1968.

【81】 V. I. Krylov, Approximate calculation of integrals (in Russian), 2nd ed., Moscov, 1967.

【82】 A. H. Stroud, Approximate calculation of multiple integrals, Prentice-Hall Series in Automatic Computation, 1971.

【83】 V. Tchakaloff, Formules de cubature mecaniques a coeffici-ents non negatifs, Bull. Sci. Math., (2) V.81, 1957, pp.123—134.

【84】 W. Gröbner, Uber die Konstruktion von Systemen orthogon ler Polynpme in ein-und-zwer-dimensionalen Bereichen, Monatsh. Math., 52(1948), 38—54.

【85】 A.Haegemans & R.Piessens, Construction of cubature formulas of degree eleven for symmetric planar regions, using orthogonal ploynomials, Numer. Math., 25(1976), 139—148.

【86】 J.G.Semple and L. Roth, Introduction to Algebraic Geometry, Oxford University Prees, London, 1949 pp. 94—96.

【87】 R. J. Walker, Algebraic Curves, Dover, New York, 1962.

【88】 L. Fejer, JRAM, 138 1910, 22—53.

【89】 L. C. Hsu and Y. S. Chou, An Asymptotic Formula for a Type of Singular Oscillatory Integrals, Math. Comput., V. 37, 156(1981), pp.503—507.

【90】 徐利治，数学分析的方法及例题选讲，高教出版社，1958.

【91】 王兴华，关于用线积分逼近重积分的准确估值，杭州大学学报，1(1962)，47—58.

【92】 王兴华，关于积分 $\int f(x, \langle\lambda x\rangle)dx$ 渐近展开的一种新推导及余

项估计，数学研究与评论，V.3，N_o.2，1983，39—45.

【93】王兴华，周蕴时，含奇异因子的振荡积分的渐近展开，科学通报，13(1982)，p.829.

【94】周蕴时，孙玉柏，关于齐次降维展开公式的注记，吉林大学学报(自然科学版)，2(1983)，39—42.

【95】周蕴时，何天晓，一类边界型求积公式的构造方法，吉林大学学报(自然科学版)，4(1983)，40—46.

【96】周蕴时，何天晓，高维Korkin定理，待发表.

【97】周蕴时，何天晓，高维方体域上的数值积分法及敛速估计，合肥工业大学学报，3(1983)，7—16.

【98】朱功勤，何天晓，高维区域上的最佳边界型求积公式，合肥工业大学学报，4(1981)，1—8.

【99】何天晓，朱功勤，构造边界型求积公式的一个数论方法，合肥工业大学学报，1(1983)，1—15.

【100】何天晓，不带微商项的边界型求积公式，数学研究与评论，2(1981)，93—102.

【101】何天晓，关于构造边界型求积公式的代数方法，计算数学，1(1985)，1—6.

【102】何天晓，关于几个特殊区域的边界型求积公式，淮北煤师院学报(自然科学版)，1(1980)，50—54.

【103】施咸亮，关于振荡函数积分的渐近展开问题，高等学校计算数学学报，1(1979)，120—122；杭州大学学报，3(1980)，17—29.

【104】施咸亮，卢志康，激烈振荡函数积分余项的精确估计，计算数学，2:4(1980)，379—382.

【105】徐利治，杨家新，具有代数精度的降维展开式与边界型求积公式，高校计算数学学报，4(1981)，361—369.

【106】徐利治，何天晓，关于具有代表精度的降维展开的最小余项估值，数学杂志，3(2)，(1982)，247—255.